哥德巴赫猜想与优化筛法

Goldbach Hypothesis and Optimization Sieve Method

司钊 司琳 SIZHAO SILIN

西北工業大學出版社

□ 策划编辑/蒋民昌
□ 责任编辑/王俊轩
□ 封面设计/王 祚

Goldbach Hypothesis and Optimization Sieve Method



ISBN 7-5612-1973-3 / O·273

定价：28.00元

哥德巴赫猜想与优化筛法

司钊 司琳 著

西北工业大学出版社

【内容简介】本书着重推介一种有别于 Brun 筛法和 Selberg 筛法的新型优化筛法。其特点是简单易懂、便于操作、适用性广。

作为该优化筛法的应用实例，书中对至今用其他方法尚未解决的 14 个数论问题逐个进行了论证。同时，对每个命题都给出了具体的求解方法、运算程序及实筛数据。书末附有 20 万以内的素数表用于数据查验。

本书可供相关专业的教学与科研工作者阅读，亦可供大学数理系高年级学生、研究生参考。

图书在版编目（CIP）数据

哥德巴赫猜想与优化筛法/司钊，司琳著. —西安：西北工业大学出版社，2005.9

ISBN 7 - 5612 - 1973 - 3

Ⅰ.哥… Ⅱ.①司… ②司… Ⅲ. ①哥德巴赫猜想 ②筛法 Ⅳ.O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 086603 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　　邮编：710072
电　　话：029-88493844　　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：西安新华印刷厂印刷
开　　本：850 mm×1 168 mm　　1/32
印　　张：16.625
字　　数：367 千
版　　次：2005 年 9 月第 1 版　　2005 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1~3 000 册
定　　价：28.00 元

前 言

自 1920 年出现 Brun 筛法后的几十年间，筛法在数论研究中所获得的卓越成效是显而易见的。不过，上个世纪末期至今，面对数论中许多遗留问题，现有筛法似乎遇到了极大困难。由此，自然会促使人们去做出新的思考和尝试，寻求新的突破。在这方面，笔者也做了一些工作，现汇集成册，提供大家参考。

这里主要推介一种新型的优化筛法。该筛法比目前应用最广，效能最强的 Selberg 筛法具有明显的优越性。用该筛法求证的哥德巴赫猜想等 14 个数论问题也是至今用其他方法都没有解决的问题，并且其适用范围绝不局限于这 14 个数论问题，而具有广泛的适用性。希望它能对读者感兴趣的研究课题有所帮助。

此项工作得到航天工业总公司七七一所党政领导的关怀和支持，在此深表谢意。同时，还得到厦门大学姚宗元教授，西北大学胡希正教授、赵宪钟教授，西北工业大学杜文奎教授，航天测控公司廖道文研究员，航天七一〇所张忠洲高工，航天七七一所于伦政研究员、孟小锁研究员、何鸿生研究员、王宇水高工以及裴娟和王艳同志的热情支持和大力帮助，在此一并表示谢意。

最后还要特别感谢西北工业大学出版社的领导和同志们，在编辑和出版工作中给予的大力支持和合作。

书中不妥之处，敬请批评指正。

作　者

2005.7.8

Email：pls33@163.com

目 录

引 言

筛法是数论中常见的一种方法。最早的筛法是由古希腊埃拉托斯染尼氏（Eratosthenes）所创立的用来寻找素数的方法，经过布朗（Brun）和泽尔贝格（Selberg）等人的逐步改进才有了更为普遍的实用价值，并成为数论研究中的一个重要方法。例如，对哥德巴赫猜想的研究，至今几乎所有最好的结果都是利用加权形式的 Selberg 筛法得到的。

不过，现有“筛法”仍存在值得改进之处，大家知道，Eratosthenes 筛法一般形式的数学表达式为

$$|N_B| = \sum_{d|k} \mu(d) |N_d|$$

式中：$|N_B|$ 通常称为筛函数，表示正整数集合 N 中所有与正整数 k 互素的元素的个数；

$|N_d|$ 表示正整数集合 N 中能被正整数 d 整除的元素的个数；

$\mu(d)$ 为茂比乌斯（Möbius）函数；

k 通常为不超过某一给定数值的全部素数的乘积。

这种筛法的基本构思是：

（1）针对具体命题和欲达到的效果选取合适的被筛对象（即被筛集合）N，并确定正整数 k 的所有素因子。

（2）明确筛选条件：即从集合 N 中分选出所有与 k 互素的元素，组成子集 N_B。

（3）对子集 N_B 的基数 $|N_B|$（即筛函数）进行上、下界估计。

遗憾的是，除了个别情况，一般而言上述筛函数表达式中的$|N_d|$不单没有一个直观的显函数表达式，而且也很难找到一个符合要求的近似式给以表述。从而，就产生了对$|N_B|$进行上、下界估计的具体困难，为了解决这一困难，先后出现了 Brun 筛法和 Selberg 筛法。

Brun 筛法和 Selberg 筛法在基本构思上与 Eratosthenes 筛法是完全一致的，所不同的只是后来者在筛函数$|N_B|$的上、下界估计方法上作了有效的改进。所以 Brun 筛法和 Selberg 筛法比 Eratosthenes 筛法虽然具有更为普遍的实用价值，但仍显不足。关键在于此类筛法的共同缺陷——即被筛集合的多样性和复杂性与筛选条件的相对单调，影响了筛法更为广阔的应用范围和更为理想的使用效果。

实际上，对于 Eratosthenes 筛法还可以开阔思路，从多个角度进行思考和改进。循此，我们作了以下几方面的工作。

（1）简化被筛集合，尽量使其单一化和简单化。

（2）采用灵活多样的筛选条件以适应各种命题的具体要求来达到予期的效果。

（3）寻求一种相对简单又易于操作的筛函数通用表示形式。

（4）寻求一种相对简单又易于操作的筛函数通用边界公式。

自 2000 年以来，我们所进行的这些工作已经有了明显的进展。应用经过改进之后的这种筛选方法，曾先后对十余个数论命题进行试证皆取得了满意的效果。这些命题基本上都是至今用其他方法尚未能解决的，其中 包括“哥德巴赫猜想”、“孪生素数猜想”、“相邻等差三素数问题”、“素数等差级数问题”……这些公认的共同关注问题。

特别值得指出的是，此新筛法不仅简单易懂，便于操作，而

且在求证所论命题时，若有必要，还能给出全解的具体求解方法。

书中第一章所论是后面各章节的基础。从第二章以后，每一章都独立阐述求证一个命题，相互之间没有关联，故每一章的各种表示符号都仅限于本章的定义范围。

为了便于读者对书中各章论述内容的验证运算，所有各章的验算筛选程序都可以从网上方便地下载。

网站：www.mathsfancy.com

第一章　通用筛函数

1.1　概述

相对于随意有限正整数集合（元素可重复）而言，有限正整数等差数列集合是比较简单的一种。而在有限正整数等差数列集合中，公差为 1 的有限自然数列集合最为简单。

显然，任何一种筛法，其筛函数的复杂程度和难易水平都与下面两个因素有关：①被筛集合②筛选条件。被筛集合越简单对应的筛函数则相应简单且易于处理操作。从这个意义上讲，当选择被筛集合时，在能达到同样效果的前题下，自然应该选择最简单的被筛集合。基于这一考虑，以下讨论中所涉及到的“被筛集合”都选择“有限自然数列集合”（或简称为自然数列）。下面再就其它几个问题给以定义和表述。

一、定义。

（1）正整数等差数列集合 N

$$N=(C_i\ ,\ i=1,2,\ldots,n) \qquad (1)$$

$$C_i=C_1+(i-1)\Delta\ , \qquad i=1,2,\ldots \qquad (2)$$

式中：C_1 和 Δ 为正整数。

C_1 称为该正整数等差数列集合的“首项”。

Δ 称为该正整数等差数列集合的“公差”。

（2）自然数列集合即为公差 $\Delta=1$ 的正整数等差数列集合。

（3）模数集合 P：

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

由r个（r为任意给定的正整数）互不相同的素数组成的素数集合P，其中元素做为筛选模数使用时，素数集合P称为模数集合。

二、正整数等差数列集合的基本特征

特征 1：正整数等差数列集合中没有重复的元素。

特征 2：正整数等差数列集合中任意相邻两元素之间的差值都等于公差$\varDelta$。

特征 3：当素数p_i与公差$\varDelta$互素时，公差为$\varDelta$的正整数等差数列集合中任意相邻的p_i个元素都构成模p_i的完全剩余组。

上述前两项特征显而易见，关于第三项特征证明如下。

证：在正整数等差数列集合N中任取相邻的p_i个元素，设其中最小的一个为h，则这p_i个元素分别为

$$h,h+\varDelta,...,h+(p_i-1)\varDelta$$

它们每两两之间的差值可用$\beta\varDelta$统一表示。这里β为不超过(p_i-1)的正整数，故β不能被p_i整除。公差$\varDelta$与p_i互素，故不能被p_i整除。由此可见，乘积$\beta\varDelta$不能被素模数p_i整除。所以，这p_i个元素每两两之间对模p_i皆不同余。自然，对模p_i两两不同余的p_i个元素即构成模p_i的完全剩余组。

不言而喻，自然数列集合是公差$\varDelta=1$的正整数等差数列集合，当然具有正整数等差数列集合的一切特征。

当我们选定自然数列集合为被筛集合以后，可以从如下两个简单实例入手进行探讨。

1.2　欧拉（Euler）函数

根据定义，欧拉函数$\varphi(n)$表示不超过n而与n互素的正整数个数（n为正整数）。将不超过n的全部正整数集合用N表示，

则欧拉函数 $\varphi(n)$ 即是集合 N 中所有与 n 互素的元素的个数。

设 n 的标准的素因子分解式为

$$n=p_1^{\alpha1}p_2^{\alpha2}\dots p_s^{\alpha s} \tag{3}$$

将 $p_1,p_2,\dots,p_s$ 构成的素数集合用 P 表示：

$$P=(p_1,p_2,\dots,p_s)$$

因为与 n 互素的元素必然都不含 $(p_1,p_2\dots,p_s)$ 这些素因子，所以集合 N 中与 n 互素的元素应满足下面的筛选条件：

$$g\neq0\ (\mathrm{mod}\,p_i)\qquad i=1,2,\dots,s \tag{4}$$

g 表示集合 N 中被选取的元素。

集合 N 称为被筛集合，集合 P 称为模数集合。

显然，这里 N 为公差 $\varDelta=1$ 的“正整数等差数列集合”。其基数 $|N|=n$。

我们知道，集合 N 中全部元素按模 p_i 可分为 p_i 个同余类子集，余数为零的同余类称做“零同余类子集”。余数为 1 的同余类称做“1 同余类子集”，……余数为 p_i-1 的同余类称做“p_i-1 同余类子集”。

命，$N_{ti}(\mathrm{mod}\,p_i)$ 表示集合 N 对模 p_i 的“ti 同余类子集”。$(i=1,2,\dots,s；\ ti=0,1,\dots,p_i-1)$

由筛选条件（4）式可知：

$$\varphi(n)=|\bigcap_{i=1}^{s}\bigcup_{ti=1}^{p_i-1}N_{ti}(\mathrm{mod}\,p_i)| \tag{5}$$

式中：$|X|$ 表示集合 X 的基数，（下同）

由于集合 N 为“正整数等差数列集合”且其公差与 n 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征可知，若以 n 的素因子 p_i 为模数，集合 N 中恰好含有 n/p_i 个模 p_i 的完全剩余组，每个完全

剩余组中的元素又分别属于 p_i 个同余类子集中的每个子集各一个元素。故模 p_i 的每个同余类子集都有相同的元素个数。

$$\left|N_{ti}(\bmod p_i)\right| = \frac{n}{p_i} \quad (i=1,2,\ldots,s\ ;\ ti=0,1,\ldots,p_i-1) \tag{6}$$

由筛选条件（4）式可见，对模数 p_i 而言，集合 N 中被筛掉的元素仅为零同余类子集的元素，而其它同余类子集中的元素都暂被保留下来，即对模 p_i 而言，被选取的元素应为下述集合中的元素：

$$YN(\bmod p_i) = \bigcup_{ti=1}^{p_i-1} N_{ti}(\bmod p_i) \tag{7}$$

$YN(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中按模 p_i 被选取的元素集合。

因为，对同一模数的各同余类子集相互之间的交集皆为空集，即：

$$N_{ti1}(\bmod p_i) \bigcap N_{ti2}(\bmod p_i) = \varnothing \tag{8}$$

$$ti1 \neq ti2$$

所以

$$|YN(\bmod p_i)| = \sum_{ti=1}^{P_i-1} |N_{ti}(\bmod p_i)| = (p_i-1)\frac{n}{p_i} \tag{9}$$

$$(i=1,2,\ldots,s)$$

命 $$k_i = \frac{(p_i-1)}{p_i} \qquad (i=1,2,\ldots,s) \tag{10}$$

得 $$|YN(\bmod p_i)| = nk_i \qquad (i=1,2,\ldots,s) \tag{11}$$

$$k_i = |YN(\bmod p_i)|\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (i=1,2,\ldots,s) \tag{12}$$

由（12）式可见，k_i 表示集合 N 中按模 p_i 被选取的元素个

数与集合 N 中全部元素个数的比值。我们将 k_i 称做按模 p_i 的“分选系数”。

由（6）式知，集合 N 中随意一个模 p_1 的同余类子集的基数为：

$$|N_{t1}(\bmod p_1)|=\frac{n}{p_1} \qquad (t1=0,1,\ldots,p_1-1) \tag{13}$$

显然，该子集 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 为“正整数等差数列集合”其公差 $\varDelta=p_1$。若以 p_2 为模数，由于模数 p_2 与“正整数等差数列集合” $N_{t1}(\bmod p_1)$ 的公差 p_1 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征同前推理，可知集合 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 中模 p_2 的同余类子集基数为

$$|\{N_{t1}(\bmod p_1)\}_{t2}(\bmod p_2)|=$$

$$|N_{t1}(\bmod p_1)|(\frac{1}{p_2})=\frac{n}{p_1p_2} \tag{14}$$

由于 $|\{N_{t1}(\bmod p_1)\}_{t2}(\bmod p_2)|=$

$$|N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap N_{t2}(\bmod p_2)| \tag{15}$$

知 $$|N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap N_{t2}(\bmod p_2)|=\frac{n}{p_1p_2} \tag{16}$$

$$(t1=0,1,\ldots,p_1-1 \;\;;\;\; t2=0,1,\ldots,p_2-1)$$

集合 $N_{t1}(\bmod p_1)$ 中除去模 p_2 的“零同余类子集”外，其余所有模 p_2 的同余类子集的并集基数为

$$|N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}N_{t2}(\bmod p_2)|=$$

$$|\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}\{N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap N_{t2}(\bmod p_2)\}|=$$

$$\sum_{t2=1}^{P_2-1}|N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap N_{t2}(\bmod p_2)|=$$

$$\frac{(p_2-1)n}{p_1p_2} \qquad (t1=0,1,\ldots,p_1-1) \tag{17}$$

对于集合 N 中多个模 p_1 的同余类子集而言则有

$$|\bigcup_{t1=1}^{P_1-1}N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}N_{t2}(\bmod p_2)|=$$

$$|\bigcup_{t1=1}^{P_1-1}\{N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}N_{t2}(\bmod p_2)\}|=$$

$$\sum_{t1=1}^{P_1-1}|N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{P_2-1}N_{t2}(\bmod p_2)|=$$

$$(p_1-1)(p_2-1)\frac{n}{p_1p_2}=nk_1k_2 \tag{18}$$

由于 $N_{t1}(\bmod p_1)\bigcap N_{t2}(\bmod p_2)$ 仍为“正整数等差数列集合”，其公差 $\varDelta=p_1p_2$。若以 p_3 为模数，则模数 p_3 与公差 p_1p_2 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征同上推导可得

$$|\bigcap_{i=1}^{3}\bigcup_{ti=1}^{P_i-1}N_{ti}(\bmod p_i)|=nk_1k_2k_3 \tag{19}$$

依次类推，即得

$$|\bigcap_{i=1}^{s}\bigcup_{ti=1}^{P_i-1}N_{ti}(\bmod p_i)|=n\prod_{i=1}^{s}k_i \tag{20}$$

将（20）式代入（5）式得

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{s}k_i \tag{21}$$

将（10）式代入（21）式可得欧拉函数表达式

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{s}(1-\frac{1}{p_i}) \tag{22}$$

1.3 Eratosthenes 筛法

将不超过正整数 n 的全部正整数集合用 N 表示，则集合 N 为公差 $\Delta=1$ 的“正整数等差数列集合”其基数 $|N|=n$。

设 $p_1,p_2,...,p_r$ 为互不相同的 r 个素数。

集合 $P=(p_1,p_2,...,p_r)$

$$K=\prod_{i=1}^{r}p_i \tag{23}$$

求集合 N 中所有与 K 互素的元素个数。

因为与 K 互素的元素必然不含 K 的任何一个素因子，所以，集合 N 中与 K 互素的元素应当满足如下筛选条件，

$$g\neq 0\ (\mathrm{mod}\ p_i)\ ,\qquad i=1,2,...,r \tag{24}$$

g 表示集合 N 中被选取的元素。

集合 N 为被筛集合，集合 P 为模数集合。

命 $N_{ti}(\mathrm{mod}\ p_i)$ 表示集合 N 对模 p_i 的“ti 同余类子集”$(i=1,2,...,r\ ;\ ti=0,1,...,p_i-1)$

$S(N,K)$ 表示集合 N 中所有与 K 互素的元素个数。由筛选条件（24）式可知：

$$S(N,K)=|\bigcap_{i=1}^{r}\bigcup_{ti=1}^{P_i-1}N_{ti}(\mathrm{mod}\ p_i)| \tag{25}$$

用模数 p_i 去除集合 N 的基数可得

$$n=p_i[\frac{n}{p_i}]+n_i \tag{26}$$

式中：$[n/p_i]$表示n/p_i的整数部分（下同）。

n_i为n对模p_i的非负的最小剩余。

被筛集合N为公差$\Delta=1$的正整数等差数列集合，根据正整数等差数列集合的基本特征，由(26)式知集合N中包含有$[n/p_i]$个模p_i的完全剩余组再加n_i个单独的元素。每个完全剩余组中的元素分别属于p_i个同余类子集中每个子集一个元素，另外的n_i个单独元素分别属于余数为$1,2,\ldots,n_i$的n_i个同余类子集各一个元素，故知集合N对模p_i的同余类子集基数为

$$|N_{ti}(\text{mod}\,p_i)|=[\frac{n}{p_i}]+Q_{ti} \tag{27}$$

$$Q_{ti}=0 \qquad (ti=0\text{或}ti>n_i)$$

$$Q_{ti}=1 \qquad (1\leqslant ti\leqslant n_i)$$

由筛选条件（24）式可知，对模数p_i而言被筛掉的只是模p_i的“零同余类子集”，其余同余类子集将被保留下来，亦即对模p_i而言，被选取的元素集合为：

$$YN(\text{mod}\,p_i)=\bigcup_{ti=1}^{p_i-1}N_{ti}(\text{mod}\,p_i)=N-N_0(\text{mod}\,p_i) \tag{28}$$

$$|YN(\text{mod}\,p_i)|=n-[\frac{n}{p_i}]=n\{1-[\frac{1}{p_i}]\}, \quad i=1,2,\ldots,r \tag{29}$$

式中：$[1/p_i]$作为“算符”定义，须在乘入基数后才可作数值计算，（下同）。

$$\text{令} \quad k_i=1-[\frac{1}{P_i}], \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{30}$$

代入（29）式得

$$|YN(\text{mod}\,p_i)|=nk_i, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{31}$$

k_i 称做按模 p_i 的“分选系数”。

显然，集合 N 对模 p_1 的随意一个同余类子集 $N_{t1}(\text{mod}\, p_1)$ 都是“正整数等差数列集合”，其公差 $\varDelta = p_1$。若以 p_2 为模数，则模数 p_2 与子集 $N_{t1}(\text{mod}\, p_1)$ 的公差 p_1 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征，同前推理可知集合 $N_{t1}(\text{mod}\, p_1)$ 中模 p_2 的“零同余类子集”基数为

$$|\{N_{t1}(\text{mod}\, p_1)\}_0(\text{mod}\, p_2)| = |N_{t1}(\text{mod}\, p_1) \bigcap N_0(\text{mod}\, p_2)| =$$

$$[|N_{t1}(\text{mod}\, p_1)|(\frac{1}{p_2})] \tag{32}$$

“零同余类子集”除外的其它各同余类子集的并集基数为：

$$|\bigcup_{t2=1}^{p_2-1}\{N_{t1}(\text{mod}\, p_1)\}_{t2}(\text{mod}\, p_2)| =$$

$$|N_{t1}(\text{mod}\, p_1) \bigcap \bigcup_{t2=1}^{p_2-1} N_{t2}(\text{mod}\, p_2)| =$$

$$|N_{t1}(\text{mod}\, p_1)| - [|N_{t1}(\text{mod}\, p_1)|(\frac{1}{p_2})] =$$

$$|N_{t1}(\text{mod}\, p_1)|\{1 - [\frac{1}{p_2}]\} \tag{33}$$

$$t1 = 0, 1, \ldots, p_1 - 1$$

对于集合 N 中多个模 p_1 的同余类子集而言则有

$$|\bigcup_{t1=1}^{p_1-1} N_{t1}(\text{mod}\, p_1) \bigcap \bigcup_{t2=1}^{p_2-1} N_{t2}(\text{mod}\, p_2)| =$$

$$|\bigcup_{t1=1}^{p_1-1}\{N_{t1}(\text{mod}\, p_1) \bigcap \bigcup_{t2=1}^{p_2-1} N_{t2}(\text{mod}\, p_2)\}| =$$

$$\sum_{t1=1}^{p_1-1}|N_{t1}(\mathrm{mod}\,p_1)\bigcap\bigcup_{t2=1}^{p_2-1}N_{t2}(\mathrm{mod}\,p_2)|=$$

$$\sum_{t1=1}^{p_1-1}|N_{t1}(\mathrm{mod}\,p_1)|\{1-[\frac{1}{p_2}]\}=$$

$$\{1-[\frac{1}{p_2}]\}\{|N|-|N_0(\mathrm{mod}\,p_1)|\}=$$

$$\{1-[\frac{1}{p_2}]\}\{n-[\frac{n}{p_1}]\}=$$

$$n\{1-[\frac{1}{p_1}]\}\{1-[\frac{1}{p_2}]\}=nk_1k_2 \tag{34}$$

由于 $N_{t1}(\mathrm{mod}\,p_1)\bigcap N_{t2}(\mathrm{mod}\,p_2)$ 仍为“正整数等差数列集合”，其公差 $\Delta=p_1p_2$。若以 p_3 为模数，则模数 p_3 与公差 p_1p_2 互素，根据正整数等差数列集合的基本特征同上推导可得：

$$|\bigcap_{i=1}^{3}\bigcup_{ti=1}^{p_i-1}N_{ti}(\mathrm{mod}\,p_i)|=nk_1k_2k_3 \tag{35}$$

依次类推，即得

$$|\bigcap_{i=1}^{r}\bigcup_{ti=1}^{p_i-1}N_{ti}(\mathrm{mod}\,p_i)|=n\prod_{i=1}^{r}k_i \tag{36}$$

将（36）式代入（25）式得

$$S(N,K)=n\prod_{i=1}^{r}k_i \tag{37}$$

再将（30）式代入（37）式可得

$$S(N,K)=n\prod_{i=1}^{r}\{1-[\frac{1}{p_i}]\} \tag{38}$$

将（38）式展开，得

$$S(N,K)=n+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\sum_{i_1=1}^{r}\cdots\sum_{i_j=1}^{r}\left[\frac{n}{p_{i1}p_{i2}\cdots p_{ij}}\right] \quad (39)$$

$$i_1<i_2<\ldots<i_j$$

引入 Möbius 函数，得

$$S(N,K)=\sum_{d|k}\mu(d)\,|N_d| \quad (40)$$

$|N_d|$表示集合 N 中能被正整数 d 整除的元素的个数。

（40）式称为 Eratosthenes 筛法。

1.4 自然数列的通用筛函数

通过上述两个实例我们可以看到，当被筛集合选用自然数列集合，当模数集合 P 中元素为互不相同的素数时，其筛函数都具有如（21）式和（37）式一样的相对简单的表述形式。即有：

$$|N_B|=|N|\prod_{i=1}^{r}k_i$$

式中：$|N_B|$表示筛函数。

$|N|$表示被筛集合的基数。

k_i为依照筛选条件按模 p_i 的分选系数。

r 为模数集合中素数的个数。

假若在保持被筛集合仍选用自然数列集合，模数集合 P 中元素仍为互不相同的素数的前题下，能够采用改变筛选条件的办法以适应各种命题的具体要求来达到预期的效果，则有希望将上述这种相对简单的筛函数表示式通用化、标准化，从而达到简化运算操作的目的。

分析上述筛法的基本概念不难看出，不同的筛选条件最终都体现为被选取的同余类子集的差异。只要我们考虑到被选取的同

余类子集的各种可能性，则所求筛函数必然有广泛的适用性。下面就此给以推论。

将不超过正整数 n 的全部正整数集合用 N 表示，则 N 为公差 $\Delta=1$ 的“正整数等差数列集合”，简称“自然数列”，其基数 $|N|=n$。

设 $p_1,p_2,\ldots,p_r$ 为互不相同的 r 个素数。将这 r 个素数组成的集合用 P 表示为

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

p_i 为集合 P 中任一元素，以 p_i 为模数，集合 N 中全部元素可分为 p_i 个同余类子集。

$N_{ti}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中模 p_i 的“ti 同余类子集”。

$N_{si}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中被选取的第 si 个模 p_i 的同余类子集（si 只是一个序号，与该同余类子集对应的余数无关）。

$\bigcup\limits_{si=1}^{\alpha i} N_{S_i}(\bmod p_i)$ 表示集合 N 中随意被选取的 α_i 个模 p_i 的同余类子集的并集。

给定筛选条件：

$$g\in\bigcup_{Si=1}^{\alpha i} N_{Si}(\bmod p_i)\,,\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{41}$$

g 表示集合 N 中被选取的元素。

求集合 N 中满足（41）式筛选条件的元素个数，即筛函数。

将满足（41）式筛选条件的元素集合用 N_B 表示，则集合 N_B 的基数 $|N_B|$ 就是所要求的筛函数。从筛选条件（41）式直接可得

$$|N_B|=|\bigcap_{i=1}^{r}\bigcup_{Si=1}^{\alpha i} N_{Si}(\bmod p_i)| \tag{42}$$

下面具体求证（42）式的函数表达式，

已知集合 N 的基数 n 可用下式表述，

$$n = p_i[\frac{n}{p_i}] + n_i \tag{43}$$

根据正整数等差数列集合的基本特征，集合 N 中含有 $[n/p_i]$ 个模 p_i 的完全剩余组，外加 n_i 个单独的元素。每个完全剩余组中的元素分属于全部 p_i 个同余类子集中每个子集一个元素，另外的 n_i 个单独元素分别属于余数为 $1,2,\ldots,n_i$ 的 n_i 个同余类子集各一个元素。故知集合 N 中模 p_i 的“ti 同余类子集”的基数为

$$|N_{ti}(\bmod p_i)| = [\frac{n}{p_i}] + Q_{ti} \tag{44}$$

$$Q_{ti} = 0 \qquad (ti = 0\text{或}ti > n_i)$$

$$Q_{ti} = 1 \qquad (1 \leqslant ti \leqslant n_i)$$

将（43）代入（44）式得

$$|N_{ti}(\bmod p_i)| = \frac{n}{p_i} + Q_{ti} - \frac{n_i}{p_i} \tag{45}$$

$$Q_{ti} = 0 \qquad (ti = 0\text{或}ti > n_i)$$

$$Q_{ti} = 1 \qquad (1 \le ti \le n_i)$$

令 $R_{ti} = Q_{ti} - \frac{n_i}{p_i}$ （46）

$$|N_{ti}(\bmod p_i)| = \frac{n}{p_i} + R_{ti} \tag{47}$$

由于 $\frac{n_i}{p_i} < 1$ （48）

故知

$$R_{ti} = 0 \qquad (n_i = 0) \tag{49}$$

$$-1 < R_{ti} < 1 \qquad (n_i \neq 0) \tag{50}$$

通常都有 $n >> p_i$，相比之下，（47）式右端第二项 R_{ti} 可以略去，故得下面的近似式：

$$|N_{si}(\bmod p_i)| = |N_{ti}(\bmod p_i)| = \frac{n}{p_i} \ (ti = 0,1,\ldots,p_i - 1)$$

$$(i = 1,2,\ldots,r) \tag{51}$$

我们知道，对同一模数的各同余类子集相互之间的交集皆为空集，所以

$$|\bigcup_{Si=1}^{\alpha i} N_{Si}(\bmod p_i)| = \sum_{Si=1}^{\alpha i} |N_{Si}(\bmod p_i)| =$$

$$\alpha_i(\frac{n}{p_i}) = nk_i \qquad (i = 1,2,\ldots,r) \tag{52}$$

式中，
$$k_i = \frac{\alpha_i}{p_i} \qquad (i = 1,2,\ldots,r) \tag{53}$$

由（52）式得

$$k_i = |\bigcup_{Si=1}^{\alpha i} N_{Si}(\bmod p_i)|(\frac{1}{n}) \tag{54}$$

由（54）式知，k_i 表示集合 N 按模 p_i 所选取的 α_i 个模 p_i 的同余类子集中的元素个数与集合 N 中全部元素个数的比率，故 k_i 称为按模 p_i 筛选的“分选系数”。

照前面确定的定义 $N_{s1}(\bmod p_1)$ 表示集合 N 中被选取的 $s1$ 号模 p_1 的同余类子集。显然，该同余类子集 $N_{s1}(\bmod p_1)$ 为“正整数等差数列集合”，其公差 $\Delta = p_1$。若以 p_2 为模数，模数 p_2 则与“正整数等差数列集合” $N_{s1}(\bmod p_1)$ 的公差 p_1 互素。根据正整数等差数列集合的基本特征同上推理可知，$N_{s1}(\bmod p_1)$ 中 $s2$ 号模 p_2 的同余类子集的基数应为

$$|\{N_{s1}(\bmod p_1)\}_{s2}(\bmod p_2)|=$$

$$|N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap N_{S2}(\bmod p_2)|=$$

$$|N_{s1}(\bmod p_1)|(\frac{1}{p_2})=\frac{n}{p_1p_2} \tag{55}$$

集合 $N_{s1}(\bmod p_1)$ 中随意 α_2 个模 p_2 的同余类子集的基数应为

$$|\bigcup_{s2=1}^{\alpha 2}\{N_{s1}(\bmod p_1)\}_{s2}(\bmod p_2)|=$$

$$|N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{s2=1}^{\alpha 2}N_{s2}(\bmod p_2)|=$$

$$|\bigcup_{s2=1}^{\alpha 2}\{N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap N_{s2}(\bmod p_2)\}|=$$

$$\sum_{s2=1}^{\alpha 2}|N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap N_{s2}(\bmod p_2)|=$$

$$\alpha_2(\frac{n}{p_1p_2}) \tag{56}$$

对于多个模 p_1 的同余类子集而言，则有

$$|\bigcup_{s1=1}^{\alpha 1}N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{s2=1}^{\alpha 2}N_{s2}(\bmod p_2)|=$$

$$|\bigcup_{s1=1}^{\alpha 1}\{N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{s2=1}^{\alpha 2}N_{s2}(\bmod p_2)\}|=$$

$$\sum_{s1=1}^{\alpha 1}|N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap\bigcup_{s2=1}^{\alpha 2}N_{s2}(\bmod p_2)|=$$

$$\alpha_1\alpha_2(\frac{n}{p_1p_2})=nk_1k_2 \tag{57}$$

由于 $N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap N_{s2}(\bmod p_2)$ 仍为“正整数等差数列集合”，其公差 $\Delta = p_1p_2$。若以 p_3 为模数，模数 p_3 则与“正整数等差数列集合” $N_{s1}(\bmod p_1)\bigcap N_{s2}(\bmod p_2)$ 的公差 p_1p_2 互素。根据正整数等差数列集合的基本特征同上推理可得

$$|\bigcap_{i=1}^{3}\bigcup_{si=1}^{\alpha i} N_{si}(\bmod p_i)| = nk_1k_2k_3 \tag{58}$$

依次类推，即得

$$|\bigcap_{i=1}^{r}\bigcup_{si=1}^{\alpha i} N_{si}(\bmod p_i)| = n\prod_{i=1}^{r} k_i \tag{59}$$

将（59）代入（42）式得

$$|N_B| = n\prod_{i=1}^{r} k_i \tag{60}$$

由（53）和（60）式可知

$$|N_B| = n\prod_{i=1}^{r} (\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{61}$$

（61）式即为所求自然数列的通用筛函数近似估算式，式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。这里被筛掉的可以是“零同余类子集”，也可以是其它同余类子集，可以是一个同余类子集，也可以是若干个同余类子集都不受限制，且不论被筛掉的同余类子集所对应的具体余数如何皆可适用，故称为通用筛函数。

1.5　通用筛函数的下界

在前节推导筛函数的过程中略去了（47）式右端的误差项 R_{ti}，这可能会带来筛函数近似估算式的双向偏差。当需要知道

筛函数确切的上、下边界数值时，显然单有筛函数近似估算式是不能满足要求的，必须对其边界值的具体情况予以讨论。

关于筛函数的下界问题：

对于任一命题，当被筛集合 N 确定之后，其基数 n 为一常数。由（60）式可知，筛函数$|N_B|$为 $k_i(i=1,2,\ldots,r)$ 的多变量函数，对（60）式所示函数求偏导数可得：

$$\frac{\partial|N_B|}{\partial k_j}=(\frac{n}{k_j})\prod_{i=1}^{r}k_i \qquad j=1,2,\ldots,r \tag{62}$$

由于 $\quad k_i>0 \qquad (i=1,2,\ldots,r) \qquad$ （63）

故

$$\frac{\partial|N_B|}{\partial k_j}>0 \qquad j=1,2,\ldots,r \tag{64}$$

可见，筛函数$|N_B|$对每一个变量 k_i $(i=1,2,\ldots,r)$ 皆为递增函数。由此可知，筛函数$|N_B|$的下界应该与诸变量 k_i $(i=1,2,\ldots,r)$ 的下界相对应。若以 k_i*表示变量 k_i 的下界函数，则筛函数的下界表达式应为：

$$|N_B|>n\prod_{i=1}^{r}k_i* \tag{65}$$

由（44）式可知，集合 N 中任取一个模 p_i 的同余类子集，其基数都满足如下不等式：

$$|N_{si}(\text{mod}\,p_i)|\geqslant[\frac{n}{p_i}] \tag{66}$$

将（43）代入（66）式得，

$$|N_{si}(\text{mod}\,p_i)|\geqslant\frac{n}{p_i}-\frac{n_i}{p_i}>\frac{n}{p_i}-\frac{p_i}{p_i}=\frac{n-p_i}{p_i} \tag{67}$$

集合 N 中随意 α_i 个模 p_i 的同余类子集的并集基数则为：

$$|\bigcup_{si=1}^{\alpha i} N_{si}(\bmod p_i)| = \sum_{si=1}^{\alpha i} |N_{s_i}(\bmod p_i)| >$$

$$\frac{\alpha_i(n-p_i)}{p_i} = n(\frac{\alpha_i}{p_i})(\frac{n-p_i}{n}) \qquad (68)$$

将（68）式代入（54）式得

$$k_i > (\frac{n-p_i}{n})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \qquad (69)$$

（69）式右端即为 k_i 的下界函数，前已述及 k_i 的下界函数用 k_i * 表示，故得：

$$k_i{}^* = (\frac{n-p_i}{n})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \qquad (70)$$

$$k_i > k_i{}^* \qquad (71)$$

将（70）代入（65）式即得筛函数的下界表达式：

$$|N_B| > n\prod_{i=1}^{r}(\frac{n-p_i}{n})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \qquad (72)$$

（72）式用于筛函数的下界计算，式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。

1.6 预备定理

在筛法应用于实际问题的求证过程中，当得到筛函数的下界表达式之后还需要对其进行运算处理。另外，对于筛选后所获得的元素也需要给予论述说明。因此，将会涉及到如下有关定理，这里给以论证。

1.6.1 素数判别问题

设 A 为任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。E=（1,2,...,A）

以埃氏（Eratosthenes）筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2\cdots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\ldots<p_r\leqslant A^{1/2}$$

给出众所周知的引理。

引理 1：大于 1 的正整数的约数中，1 以外的最小约数为素数。

引理 2：任一复合数 b 的不为 1 的最小约数（按引理 1，应是素数）不超过 $b^{1/2}$。

已知，集合 E 中所有元素都不超过 A。根据引理 1 和引理 2，则集合 E 中所有复合数的最小素因子必然属于集合 P。由此推得：

引理 3：集合 E 中大于 1 的各元素，凡不能被集合 P 中任何一个元素整除者必为奇素数。

证：设 u 为集合 E 中大于 1 的某元素，u 不能被集合 P 中任何一个元素整除。

2 为集合 P 中最小的元素，根据前面设定条件 u 不能被 2 整除，所以 u 为奇数。假若 u 不为奇素数，则必为复合数。u 为复合数就必定能被它自身的最小素因子整除，而它自身的最小素因子就是集合 P 中的一个元素，由此推得，u 能被集合 P 中的一个元素整除。这与设定的前题条件相矛盾，故引理得证。

1.6.2 素数分布问题

关于素数分布问题，实际上至今、还没有一个精确描述全体素数分布的公式，Legendre 给出的渐近公式

$$\Pi(x)\cong\frac{x}{\ln x-1.08366},\qquad x\to+\infty \tag{73}$$

和 J.Hadamard 证明的素数定理

$$\Pi(x) \cong \frac{x}{\ln x}, \qquad x \to +\infty \tag{74}$$

都是大数值时的极限公式，当 $x \to +\infty$ 时，二者是完全等效的，只是在变量 x 的有限区间存在着较大的差异。

经验算证明，在有限区间内（73）式的计算结果偏差远小于（74）式（见附表）。所以，从实用角度来看，（73）式应该更为适用，因为在有限区间内它能给出更为精确的运算结果，在极限情况下又能满足（74）式的极限值。

将（73）式的函数形式作以变换：

$$\Pi(x) \cong \frac{x}{\ln x - 1.08366} =$$

$$\left(\frac{\ln x}{\ln x - 1.08366}\right)\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \left(1 + \frac{1.08366}{\ln(0.3383x)}\right)\left(\frac{x}{\ln x}\right) \tag{75}$$

令 $$\eta = 1 + \frac{1.08366}{\ln(0.3383x)} \tag{76}$$

得 $$\Pi(x) \cong \eta\left(\frac{x}{\ln x}\right) \tag{77}$$

由（76）式可以求得

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{-1.08366}{x\ln^2(0.3383x)} < 0 \tag{78}$$

（78）式表明，η 为 x 的递减函数，而且，当 x=100 时，η 值小于 2，即有

$$\eta(x = 100) = 1.308 < 2 \tag{79}$$

由(78)式和（79）式可知 $\eta < 2 \qquad (x > 100)$ （80）

将（80）式代入（77）式可得

$$\Pi(x) < 2\left(\frac{x}{\ln x}\right) \qquad (x > 100) \tag{81}$$

$\Pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数，上述（77）式为其近似计算公式，（81）式为其上界公式。

必要指出的是（81）式只在 $x>100$ 的大数值区域适用，比（81）式更有普遍适用性的上界公式则为切比晓夫不等式：

$$\Pi(x)<(6\ln 2)(\frac{x}{\ln x}), \qquad x\geqslant 2 \tag{82}$$

显然，在小数值范围内选用（82）式比较适宜，在大数值范围内（81）式和（82）式可随意选用。

另外，作者通过验算确定了下面的近似计算公式：

$$\Pi(x)\cong(1+\frac{0.4649}{\log_{10}(0.3023x)})(\frac{x}{\ln x}) \tag{83}$$

（83）式计算结果的平均偏差比（73）式略有改进（见表1-1），尤其在数值较大的区域值得参考使用。

表 1-1 $\Pi(x)$ 三种公式的验算数据

公式 1：$\Pi(x)=\frac{x}{\ln x}$

公式 2：$\Pi(x)=\frac{x}{\ln x-1.08366}$

公式 3：$\Pi(x)=(1+\frac{0.4649}{\log_{10}0.3023x})\frac{x}{\ln x}$

X 值 $\times 10^4$	$\Pi(x)$ 实筛值	公式 1		公式 2		公式 3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
1	1229	1085	-144	1230	1	1230	1
5	5133	4621	-512	5135	2	5135	2
10	9592	8685	-907	9588	-4	9586	-6
15	13848	12585	-1263	13844	-4	13841	-7
20	17984	16385	-1599	17981	-3	17978	-6

续表

X值 ×10^4	$\Pi(x)$ 实筛值	公式 1		公式 2		公式 3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
25	22044	20114	-1930	22035	-9	22030	-14
30	25997	23787	-2210	26023	26	26017	20
35	29977	27417	-2560	29960	-17	29953	-24
40	33860	31009	-2851	33853	-7	33845	-15
45	37706	34570	-3136	37709	3	37700	-6
50	41538	38102	-3436	41532	-6	41522	-16
55	45322	41610	-3712	45326	4	45315	-7
60	49098	45096	-4002	49095	-3	19082	-16
65	52831	48562	-4269	52840	9	52827	-4
70	56543	52010	-4533	56564	21	56550	7
75	60238	55440	-4798	60268	30	60252	14
80	63951	58856	-5095	63955	4	63938	-13
85	67617	62257	-5360	67624	7	67607	-10
90	71274	65645	-5629	71279	5	71260	-14
95	74907	69019	-5888	74917	10	74897	-10
100	78498	72382	-6116	78542	44	78522	24
105	82134	75733	-6401	82155	21	82132	-2
110	85714	79074	-6640	85755	41	85731	17
115	89302	82405	-6897	89343	41	89318	16
120	92938	85727	-7211	92920	-18	92895	-43
125	96469	89039	-7430	96487	18	69461	-8
130	100021	92343	-7678	100045	24	100016	-5
135	103544	95639	-7905	103591	47	103563	19
140	107126	98926	-8200	107129	3	107099	-27
145	110630	102204	-8426	110657	27	110625	-5
150	114155	105477	-8678	114178	23	114146	-9
155	117663	108743	-8920	117691	28	117658	-5

续表

X值 ×10^4	Π(x) 实筛值	公式1		公式2		公式3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
160	121127	112001	-9126	121195	68	121161	34
165	124634	115252	-9382	124691	57	124655	21
170	128141	118499	-9642	128181	40	128145	4
175	131608	121738	-9870	131663	55	131626	18
180	135072	124970	-10102	135137	65	135099	27
185	138542	128198	-10344	138606	64	138567	25
190	142029	131419	-10610	142068	39	142027	-2
195	145502	134637	-10865	145526	24	145484	-18
200	148933	137849	-11084	148976	43	148933	0
205	152382	141053	-11329	152418	36	152374	-8
210	155805	144256	-11549	155858	53	155813	8
215	159250	147452	-11798	159291	41	159246	-4
220	162662	150644	-12018	162718	56	162671	9
225	166081	153830	-12251	166139	58	166091	10
230	169511	157013	-12498	169557	46	169508	-3
235	172873	160190	-12683	172967	94	172917	44
240	176302	163365	-12937	176375	73	176324	22
245	179684	166534	-13150	179776	92	179724	40
250	183072	169701	-13371	183175	103	183122	50
255	186462	172863	-13599	186568	106	186514	52
260	189880	176019	-13861	189954	74	189899	19
265	193256	179175	-14081	193341	85	193284	28
270	196645	182323	-14322	196718	73	196660	15
275	199993	185471	-14522	200095	102	200037	44
280	203362	188612	-14750	203464	102	203405	43
285	206789	191754	-15035	206835	46	206774	-15
290	210109	194889	-15220	210196	87	210135	26

续表

X值 ×10⁴	Π(x) 实筛值	公式1		公式2		公式3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
295	213453	198022	-15431	213557	104	213494	41
300	216816	201151	-15665	216912	96	216848	32
305	220136	204277	-15859	220263	127	220199	63
310	223492	207399	-16093	223610	118	223545	53
315	226835	210520	-16315	226957	122	226890	55
320	230209	213638	-16571	230300	91	230231	22
325	233577	216749	-16828	233635	58	233566	-11
330	236900	219861	-17039	236970	70	236900	0
335	240230	222970	-17260	240302	72	240231	1
340	243539	226073	-17466	243627	88	243556	17
345	246909	229176	-17733	246954	45	246881	-28
350	250150	232274	-17876	250273	123	250198	48
355	253412	235373	-18039	253593	181	253518	106
360	256726	238466	-18260	256907	181	256831	105
365	260064	241557	-18507	260219	155	260142	78
370	263397	244646	-18751	263528	131	263450	53
375	266717	247733	-18984	266893	176	266756	39
380	269987	250815	-19172	270137	150	270056	69
385	273322	253895	-19427	273436	114	273354	32
390	276611	256974	-19637	276734	123	276651	40
395	279921	260052	-19869	280030	109	279946	25
400	283146	263124	-20022	283320	174	283236	90
405	286490	266195	-20295	286609	119	286524	34
410	289774	269266	-20508	289897	123	289811	37
415	293010	272335	-20675	2931852	175	293096	86
420	296314	275400	-20914	296466	152	296377	63
425	299583	278460	-21123	299742	159	299652	69

续表

X值 ×10^4	Π(x) 实筛值	公式 1		公式 2		公式 3	
		计算数	偏差	计算数	偏差	计算数	偏差
430	302824	281519	-21305	303018	194	302927	103
435	306084	284578	-21506	306293	209	306200	116
440	309335	287633	-21702	309562	227	309469	134
445	312666	290687	-21979	312832	166	312737	71
450	315948	293741	-22207	316101	153	316006	58
455	319164	296791	-22373	319365	201	319269	105
460	322441	299836	-22605	322625	184	322527	86
465	325706	302881	-22825	325884	178	325786	80
470	328964	305927	-23037	329144	180	329044	80
475	332219	308969	-23250	332399	180	332299	80
480	335439	312011	-23428	335654	215	335552	113
485	338694	315049	-23645	338905	211	338802	108
490	341992	318082	-23910	342151	159	342047	55
495	345235	321117	-24118	345398	163	345293	58
500	348513	324148	-24365	348641	128	348535	22

第二章　哥德巴赫猜想

关于偶数的哥德巴赫猜想系指不小于 6 的任意偶数，猜想可表为二个奇素数之和。在小数值范围内，这一命题已被逐一验算确认，困难的只是任意大偶数能否表为二个奇素数之和的问题，至今尚未得到公认求证。下文就此问题做以讨论。

2.1　求解证明

设 A 为大于 100000 的任意大偶数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示，则集合 E 的基数 $|E|$ 等于 A。

$$|E| = A \tag{1}$$

以埃氏（Eratosthenes）筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下，$P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$

$$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leqslant A^{1/2} \tag{2}$$

A 为偶数，必可用下式表述 $A = 2n$　(n 为正整数)　（3）

将不超过 n 的全部正整数集合用 N 表示，则集合 N 的基数 $|N|$ 等于 n。

$$|N| = n \tag{4}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组，

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$n \equiv n_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

其中，A_i 和 n_i 为非负的最小剩余（以下类同）。

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g \not\equiv n_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{5}$$

$$g \not\equiv p_i - n_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{6}$$

g 表示集合 N 中被选元素

从集合 N 中，将同时符合（5）和（6）式条件的元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数$|N_B|$（筛函数）。

2.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列，模数集合 P 中的元素为互不相同的素数，根据第一章中给出的相关公式（61）式可知，基数$|N_B|$的近似估算公式为

$$|N_B| = n\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{7}$$

根据第一章中（72）式可知，基数$|N_B|$的下界计算公式为

$$|N_B| > n\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{n-p_i}{n}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{8}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体分析确定 α_i 的数值：

当 i=1 时，筛选条件即为

$$g \not\equiv n_1 \pmod{p_1} \tag{9}$$

$$g \not\equiv p_1 - n_1 \pmod{p_1} \tag{10}$$

由于 $p_1 = 2$， $n_1 = 0$ 或 $n_1 = 1$， 都有

$$p_1 - n_1 \equiv n_1 \pmod{p_1}$$

所以，（9）和（10）式完全等价，仅需考虑其中之一即可。

按照（9）式可知，集合 N 中模 p_1 的“n_1 同余类子集”不符合被选条件，应当筛掉，剩下的另外一个模 p_1 的同余类子集则符合被选条件，应被选取，故知

$$\alpha_1 = 1 \tag{11}$$

当 $i > 1$ 且 $n_i = 0$ 时，筛选条件即为

$$g \neq 0 \pmod{p_i}, \qquad i = 2,3,\ldots,r \tag{12}$$

$$g \neq p_i \pmod{p_i}, \qquad i = 2,3,\ldots,r \tag{13}$$

显然，上述两个条件是完全等价的，只需考虑其中之一即可，按照（12）式可知，只有模 p_i 的“0 同余类子集”不符合被选条件，模 p_i 的其余(p_i -1)个同余类子集都能符合被选条件应被选取，故知，

$$\alpha_i = p_i - 1 \qquad (n_i = 0, i > 1) \tag{14}$$

当 $i > 1$ 且 $n_i \neq 0$ 时，筛选条件（5）和（6）式为两个不同的条件，由二者可知，集合 N 中模 p_i 的“ n_i 同余类子集”和“(p_i - n_i)同余类子集”都不符合被选条件，应当筛掉，而其余（ p_i -2）个模 p_i 的同余类子集都符合被选条件，应被选取，故知

$$\alpha_i = p_i - 2 \qquad (n_i \neq 0, i > 1) \tag{15}$$

将（14）式和（15）式合并可得

$$\alpha_i = p_i - 2^{\delta i} \qquad (i > 1) \tag{16}$$

$\delta i = 0 \quad (n_i = 0)$，$\delta i = 1 \quad (n_i \neq 0)$

将（11）式和（16）式代入（7）式得

$$|N_B| = (\frac{n}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i - 2^{\delta i}}{p_i}) \tag{17}$$

$\delta i = 0 \quad (n_i = 0)$，$\delta i = 1 \quad (n_i \neq 0)$

将（11）式和（16）式代入（8）式得

$$|N_B| > F_1(\frac{n}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i - 2^{\delta i}}{p_i}) \tag{18}$$

$\delta i = 0 \quad (n_i = 0)$，$\delta i = 1 \quad (n_i \neq 0)$

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r}\{1-(\frac{p_i}{n})\} > 1-(\frac{1}{n})\sum_{i=1}^{r}p_i \tag{19}$$

由于$F_1 > 0$，根据第一章（64）式，可将（18）式改写为

$$|N_B| > F_1(\frac{n}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{20}$$

由第一章（77）式可推得

$$\Pi(x)-\Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \tag{21}$$

由（21）式可知，数值越大的区域素数分布的密度越小。故得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i < (\frac{1}{2})(p_1+p_r)\Pi(p_r) \tag{22}$$

根据第一章（82）式可得

$$\Pi(p_r) < 6\ln 2(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{23}$$

将（23）式代入（22）式

$$\sum_{i=1}^{r}p_i < \frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{24}$$

将（24）式代入（19）式

$$F_1 > 1-\frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{n\ln p_r} \tag{25}$$

将（25）式代入（20）式得

$$|N_B| > \{\frac{n}{2}-\frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{26}$$

将（$n/2$）作以下变换：

$$n/2=(n/2)\{p_2/(p_3-2)\} \tag{27}$$

$$n/2=(n/2)\{p_3/(p_4-2)\} \tag{28}$$

$$n/2=(n/2)\{p_4/(p_5-2)\}+n/(p_5-2) \tag{29}$$

$$n/2=(n/2)\{p_5/(p_6-2)\} \tag{30}$$

$$n/2=(n/2)\{p_6/(p_7-2)\}+n/(p_7-2) \tag{31}$$

$$n/2=(n/2)\{p_7/(p_8-2)\} \tag{32}$$

$$n/2=(n/2)\{p_8/(p_9-2)\}+n/(p_9-2) \tag{33}$$

$$n/2=(n/2)\{p_9/(p_{10}-2)\}+2n/(p_{10}-2) \tag{34}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{10}/(p_{11}-2)\} \tag{35}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{11}/(p_{12}-2)\}+2n/(p_{12}-2) \tag{36}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{12}/(p_{13}-2)\}+n/(p_{13}-2) \tag{37}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{13}/(p_{14}-2)\} \tag{38}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{14}/(p_{15}-2)\}+n/(p_{15}-2) \tag{39}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{15}/(p_{16}-2)\}+2n/(p_{16}-2) \tag{40}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{16}/(p_{17}-2)\}+2n/(p_{17}-2) \tag{41}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{17}/(p_{18}-2)\} \tag{42}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{18}/(p_{19}-2)\}+2n/(p_{19}-2) \tag{43}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{19}/(p_{20}-2)\}+n/(p_{20}-2) \tag{44}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{20}/(p_{21}-2)\} \tag{45}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{21}/(p_{22}-2)\}+2n/(p_{22}-2) \tag{46}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{22}/(p_{23}-2)\}+n/(p_{23}-2) \tag{47}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{23}/(p_{24}-2)\}+2n/(p_{24}-2) \tag{48}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{24}/(p_{25}-2)\}+3n/(p_{25}-2) \tag{49}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{25}/(p_{26}-2)\}+n/(p_{26}-2) \quad (50)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{26}/(p_{27}-2)\} \quad (51)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{27}/(p_{28}-2)\}+n/(p_{28}-2) \quad (52)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{28}/(p_{29}-2)\} \quad (53)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{29}/(p_{30}-2)\}+n/(p_{30}-2) \quad (54)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{30}/(p_{31}-2)\}+6n/(p_{31}-2) \quad (55)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{31}/(p_{32}-2)\}+n/(p_{32}-2) \quad (56)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{32}/(p_{33}-2)\}+2n/(p_{33}-2) \quad (57)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{33}/(p_{34}-2)\} \quad (58)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{34}/(p_{35}-2)\}+4n/(p_{35}-2) \quad (59)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{35}/(p_{36}-2)\} \quad (60)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{36}/(p_{37}-2)\}+2n/(p_{37}-2) \quad (61)$$

$$n/2=(n/2)\{p_{37}/(p_{38}-2)\}+2n/(p_{38}-2) \quad (62)$$

将（27）~（62）式逐次代入，可得

$$\frac{n}{2}=(\frac{n}{2})\prod_{i=3}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+F_2 \quad (63)$$

$$F_2=(\frac{n}{p_5-2})\prod_{i=6}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{n}{p_7-2})\prod_{i=8}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_9-2})\prod_{i=10}^{38}\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\}+(\frac{2n}{p_{10}-2})\prod_{i=11}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2n}{p_{12}-2})\prod_{i=13}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{n}{p_{13}-2})\prod_{i=14}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_{15}-2})\prod_{i=16}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2n}{p_{16}-2})\prod_{i=17}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2n}{p_{17}-2})\prod_{i=18}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2n}{p_{19}-2})\prod_{i=20}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_{20}-2})\prod_{i=21}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2n}{p_{22}-2})\prod_{i=23}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_{23}-2})\prod_{i=24}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2n}{p_{24}-2})\prod_{i=25}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{3n}{p_{25}-2})\prod_{i=26}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{n}{p_{26}-2})\prod_{i=27}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_{28}-2})\prod_{i=29}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{n}{p_{30}-2})\prod_{i=31}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{6n}{p_{31}-2})\prod_{i=32}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{n}{p_{32}-2})\prod_{i=33}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2n}{p_{33}-2})\prod_{i=34}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{4n}{P_{35}-2})\prod_{i=36}^{38}\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\}+$$

$$(\frac{2n}{p_{37}-2})(\frac{p_{37}}{p_{38}-2})+(\frac{2n}{p_{38}-2}) \tag{64}$$

将 $p_5=11$，$p_6=13$，$p_7=17$，$p_8=19$，$p_9=23$，$p_{10}=29$，$p_{11}=31$，$p_{12}=37$，$p_{13}=41$，$p_{14}=43$，$p_{15}=47$，$p_{16}=53$，$p_{17}=59$，$p_{18}=61$，$p_{19}=67$，$p_{20}=71$，$p_{21}=73$，$p_{22}=79$，$p_{23}=83$，$p_{24}=89$，$p_{25}=97$，$p_{26}=101$，$p_{27}=103$，$p_{28}=107$，$p_{29}=109$，$p_{30}=113$，$p_{31}=127$，$p_{32}=131$；$p_{33}=137$，$p_{34}=139$，$p_{35}=149$，$p_{36}=151$，$p_{37}=157$，$p_{38}=163$代入（64）式，得

$$F_2=0.40145n \tag{65}$$

将（65）式代入（63）式得

$$\frac{n}{2}=(\frac{n}{2})\prod_{i=3}^{38}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+0.40145n \tag{66}$$

将（66）式代入（26）式得

$$|N_B|>(\frac{n}{2})\prod_{j=3}^{38}(\frac{p_{j-1}}{p_j-2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i})+F_3 \tag{67}$$

$$F_3=\{0.40145n-\frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{68}$$

由(2)和(3)式知，$n\geqslant\frac{p_r^{\ 2}}{2}$ (69)

由（69），（68）式可知

$$F_3\geqslant F_4 p_r\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{70}$$

$$F_4=(\frac{0.40145p_r}{2})-\frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)}{2\ln p_r} \tag{71}$$

$$\frac{dF_4}{dp_r}=0.2007-1.0397\{\frac{\ln p_r-(p_1+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\}=$$

$$0.2007-\frac{1.0397}{\ln p_r}+\frac{1.0397(p_1+p_r)}{p_r\ln^2 p_r}>$$

$$0.2007-\frac{1.0397}{\ln p_r} \tag{72}$$

命 $0.2007-\frac{1.0397}{\ln p_r}>0$

得 $p_r>\mathrm{e}^{5.18}=178$ (73)

将条件（73）式代入（72）式即得

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}p_r} > 0 \qquad (p_r > 178) \tag{74}$$

由（74）式可知，当 $p_r > 178$ 时，F_4 为 p_r 的增值函数。

当 $A \geqslant 100\,000$ 时，$p_r \geqslant 313 > 178$

且当 $p_r = 313$ 时，$F_4 = 5.8 > 1$

故知，$F_4 > 1 \quad (A \geqslant 100\,000)$ （75）

将（75）式代入（70）式得：

$$F_3 > p_r \prod_{i=2}^{r} \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) = \frac{p_r}{3} \prod_{i=3}^{r} \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) \tag{76}$$

由于 $p_i - 2 \geqslant p_{i-1} \quad (i \geq 3)$ （77）

$$\text{故知}\, F_3 > \left(\frac{p_r}{3}\right) \prod_{i=3}^{r} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i}\right) = 1 \tag{78}$$

将（78）式代入（67）式，得

$$|N_B| > \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \prod_{j=3}^{38} \left(\frac{p_{j-1}}{p_j}\right) \prod_{i=39}^{r} \left(\frac{p_i - 2}{p_i}\right) + 1 \tag{79}$$

由（77）和（79）可得，

$$|N_B| > \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \prod_{i=3}^{r} \left(\frac{p_{i-1}}{p_i}\right) + 1 = \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{p_r}\right) + 1 \tag{80}$$

将（69）式代入（80）式得

$$|N_B| > \left(\frac{p_r}{4}\right) + 1 \tag{81}$$

由筛选条件（5）式可知，集合 N_B 中肯定不含元素 n。因此，集合 N_B 中数值超过$(n-2)$的元素最多只有一个(即 $n-1$)，那么集合 N_B 中数值不超过$(n-2)$的元素个数至少应为$(|N_B|-1)$个。故由（81）式可知，集合 N_B 中数值不超过$(n-2)$的元素个数为

$$\left|N_B\right|-1>\frac{p_r}{4} \tag{82}$$

2.1.2 通过子集 N_B 求解

我们从集合 N_B 中任取一个数值不超过$(n\text{-}2)$的元素 d,再引入参量:

$$x=n+d \tag{83}$$

$$y=n-d \tag{84}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组:

$$d\equiv d_i\ (\bmod p_i) \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$x\equiv x_i\ (\bmod p_i) \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$y\equiv y_i\ (\bmod p_i) \qquad i=1,2,\ldots,r$$

根据定义式（83）和（84）可知

$$x\in E \qquad x>1 \tag{85}$$

$$y\in E \qquad y>1 \tag{86}$$

由于 $d\in N_B$，根据筛选条件（5）式可知:

$$d_i\neq n_i \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{87}$$

根据筛选条件（6）式可知

$$d_i\neq p_i-n_i \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{88}$$

依据同余式的性质，由（83）式和（84）式推得

$$x_i\equiv n_i+d_i\ (\bmod p_i) \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{89}$$

$$y_i\equiv n_i-d_i\ (\bmod p_i) \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{90}$$

由（87),（88）和（89）式可得

$$x_i\neq 0 \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{91}$$

由（87）式和（90）式可得

$$y_i\neq 0 \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{92}$$

根据第一章引理 3，由（85）和（91）式可知，x 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（86）和（92）式可知，y 为奇素数。

将（83）式和（84）式两端相加，可得 $x+y=2n$　　（93）

将（3）式代入（93）式，即得我们所要求证的关系式

$$A=x+y \tag{94}$$

（94）式中，x 和 y 都是奇素数，故该式即为关于偶数的哥德巴赫猜想的数学表达式。

由于集合 N_B 中每个数值不超过$(n-2)$的元素都对应（94）式的一个解（即一对奇素数）。从（82）式可知，满足（94）式的解的个数应不少于$(p_r/4)$个。

对于偶数 100000 而言，$p_r/4=78.25$ 故知，偶数 100000 对应（94）式的解的个数必不少于 79 个（即 79 对奇素数）。

其它大于 100000 的偶数，所对应的 $p_r/4$ 都不小于 78.25。所以，对应（94）式的解的个数亦不少于 79 个（即 79 对奇素数）。到此，应该得到下面的结论。

结论：大于 100000 的任意大偶数都可表示为二个奇素数之和，而且，满足此条件的奇素数不少于$(p_r/4)$对。p_r 为不超过给定偶数的平方根的最大素数。

2.2　解的完备性问题

前述通过集合 N_B 求得（94）式的解，并非（94）式的全解，其全解还应补充以下两个部分。

2.2.1　补充解求证

一、补充解之一

延用前面的符号，$E=(1,2,\ldots,A)$

$$A=2n \qquad (n\text{ 为正整数}) \tag{95}$$

$$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leqslant A^{1/2} \tag{96}$$

$n \equiv n_i \pmod{p_i}$　　　　$i = 1,2,\ldots,r$

由定义（95）式可知

$$n \in E, \qquad n > 1 \tag{97}$$

假若，$n_i \neq 0$，　　$i = 1,2,\ldots,r$　　（98）

根据第一章引理3，由（97）和（98）式可知，n 为奇素数。

由（95）式得，$A = n + n$ 故知，此时 (n,n) 为满足（94）式的一个解。

二、补充解之二

延用前面的定义，

$$E = (1,2,\ldots,A)$$

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leqslant A^{1/2}$$

$A \equiv A_i \pmod{p_i}$　　　　$i = 1,2,\ldots,r$

用筛选方法从集合 P 中分选出必要的子集。

给定筛选条件，

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{99}$$

g 表示集合 P 中被选元素。

从集合 P 中，将符合（99）式条件的所有元素分选出来，组成子集 P_B。

A 为偶数，必然 $A_1 = 0$。由筛选条件（99）式可知，P_1 肯定不属于集合 P_B，只要集合 P_B 不是空集，则其中的元素只能是奇素数。

假若 $P_B \neq \varnothing$，我们从集合 P_B 中任取一个奇素数 e

且令　$z = A - e$　　（100）

则　$z \in E$，　　$z > 1$　　（101）

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组，

$$e \equiv e_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$z \equiv z_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

由于 $e \in P_B$，根据筛选条件（99）式可知

$$e_i \neq A_i, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{102}$$

依据同余式的性质，由（100）式推得

$$z_i \equiv A_i - e_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{103}$$

由（102）和（103）式可知

$$z_i \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{104}$$

根据第一章引理 3，由（101）式和（104）式可知 z 为奇素数。将（100）式移项可得，

$$A = z + e \tag{105}$$

由（105）式可知，(z,e) 为满足（94）式的一个解。同理，集合 P_B 中的每个元素都对应（94）式的一个解。

2.2.2　全解构成

满足（94）式的全解应由以下三部分组成：

（1）通过集合 N_B 求得的解；

（2）检验 n 是否为奇素数求得的解；

（3）通过集合 P_B 求得的解。

2.3　求解程序

下面为用 ASP 写的求解程序，分为“输入界面”和“运算显示”两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<%@LANGUAGE="VBSCRIPT" CODEPAGE="936"%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;
  charset=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>哥德巴赫猜想</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno() （
   var a=form1.a.value;
   if(a==""||a==null) （
      alert("请输入偶数！");
      return;
   ）else if(parseInt(a)%2!=0||parseInt(a)<8) （
        alert("输入的数必须是大于等于 8 的偶数！");
        return;
   ）form1.submit();
）
</script>
</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
哥德巴赫猜想求解程序</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的偶数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
```

```
<table width="500" border="0" align="center" cellpadding="5"
cellspacing="0">
    <tr>
      <td align="right">请输入偶数：</td>
      <td><input name="a" type="text" id="a"></td>
    </tr>
  <tr>
    <td    align="center"    colspan="2"><input    type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
       
    <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
      </tr>
    </table>
  </form>
  <p align="center"> </p>
  </body>
  </html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;
charset=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>无标题文档</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
```

```
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点
击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center"id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>哥德巴赫猜想求解运算结果
</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
var array_ai = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<0 || a % 2 !=0)
{
    document.write("输入错误！ ");
}else{
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的偶数 a
为：</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"     
  <font color=#FF0000 size='4'>n = a/2</font></font><br>");
n=parseInt(a/2);
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
```

```
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
{//alert(array_pi[i]);
  flag=1;
  for(j=2;j<=(pi/2);j++)
  {
  if(pi%j==0)
  {
        flag=0;
        break;
  }
}
if(flag==1)
{
      ni=n%pi;
      array_ni[i]=ni;
      array_pi[i]=pi;
      array_pi2[i]=pi;
      array_ai[i]=a%pi;
      //array_pi_ni[i]=pi-ni
      //alert(array_pi[i]);
      i++;
  }
}

ther=i;
```

```
    flag=1;
    for(i=0;i<ther;i++){
      if(array_ni[i]==0){
            flag=0;
            break;
      }
    }
    if(flag==1){
      document.write("<font color=#0000FF size=3>n 为素数，
即：</font>x="+n+" y="+n+" <font color=#0000FF size=3>为一对
解</font><br>");
      num1=1;
    }
    for(i=0;i<n;i++){
      array_n[i]=i+1;
      //alert(array_n[i]);
    }
    for(i=0;i<array_n.length;i++)
    {
      for(k=0;k<array_pi.length;k++)
      {

    if((array_n[i]%array_pi[k]==array_ni[k])||(array_n[i]%array_pi
[k]==array_pi[k]-array_ni[k]))
                {
                      array_n[i]=0;
                      break;
                }

      }
```

```
}

for(i=1;i<array_pi.length;i++){
  theflag=1;
  for(k=0;k<array_pi.length;k++)
  {
    if((array_pi[i]%array_pi[k]==array_ai[k]))
        {
            array_pi2[i]=0;
            break;
        }
  }
}

array_n[n-2]=0;


document.write("<font color=#0000FF size=3>NB 集合中数
值不超过(n-2)的各元素的值为：</font>");
x=0;
for(i=0;i<n;i++){
  if(array_n[i]>0){
      x++;
      document.write(array_n[i] + " ");
  }
}
num2=x;


document.write("<br><font color=#0000FF size=3>NB 集合
```

```
中数值不超过(n-2)的元素的个数为：</font>" + x + "<br>");
    if(x>0){
      document.write("<font color=#0000FF size=3>从 NB 集合
中求得的素数对：</font><br>");
      var astr=new String(a);
      var thelength=astr.length;
      var x11,y11;
      m=1;
      for(i=0;i<n-1;i++)
      {
        switch(array_n[i])
        {
          case 0: break;
          default:
              x=n+array_n[i];
              y=n-array_n[i];
              x11=new String(x);
              for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
                   x11="0"+""+x11;
              }
              y11=new String(y);
              for(var iii=y11.length;iii<thelength;iii++){
              y11="0"+""+y11;
          }
          document.write("x="+x11+"
y="+y11+"    ");
                   if(m%3==0)
                   {
                     document.write("<br>");
                    }
```

```
                        m=m+1;
                    }

                }
            }
            var array_hi = new Array();
            var xx=0;
            var theflag;
            for(i=1;i<array_pi.length;i++){
                theflag=1;
                for(k=0;k<array_pi.length;k++)
                {
                    if((array_pi[i]%array_pi[k]==array_ai[k]))
                        {
                            theflag=0;
                            break;
                        }

                }if(theflag==1){
                    array_hi[xx]=array_pi[i];
                    xx++;
                }
            }
            num3=xx;
            if(xx>0){
                document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合PB中求得的解的个数为：</font>" + xx + "<br>");
                document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合PB中求得的解：</font><br>");
                var astr=new String(a);
```

```
        var thelength=astr.length;
        var x11,y11;
        m=1;
        for(i=0;i<array_hi.length;i++)
        {
                        x1=array_hi[i];
                        y1=a-array_hi[i];
                        x11=new String(x1);
                        for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
                               x11="0"+""+x11;
                        }
                        y11=new String(y1);
                        for(var iii=y11.length;iii<thelength;iii++){
                               y11="0"+""+y11;
                        }
                        document.write("<font size='4'>x</font>=
"+x11+" <font size='4'>y</font>="+y11+"    
                        ");
                       if(m%3==0)
                       {
                         document.write("<br>");

                       }
                       m=m+1;


      }
    }
    document.write("<br><div><font color=#FF0000 size=4>偶数
<font color=#8000FF size=4>"+a+"</font>的满足哥德巴赫猜想的
全解的个数共计："+(num1+num2+num3)+"对<br>具体每对解的
```

```
数据见上表</font></div>");
    document.all("wait_div").style.display="none";
    document.all("wait2_div").style.display="";
    }
    </script>
    </p></body>
    </html>
```

2.4　实筛数据

输入的偶数 *a* 为：2310　*n* = a/2

NB 集合中数值不超过(*n*-2)的各元素的值为：26 32 38 46 58 62 68 94 104 122 124 134 136 142 146 164 172 218 226 244 268 272 274 278 292 296 298 316 326 328 332 334 344 368 394 398 404 412 416 428 446 454 464 472 482 502 508 512 514 538 542 554 568 578 586 592 598 632 634 646 656 668 676 692 706 712 716 722 724 734 746 758 776 796 818 824 838 842 844 848 862 872 874 884 898 914 926 928 932 944 956 958 974 976 982 988 998 1006 1024 1048 1052 1058 1066 1082 1084 1088 1096

NB 集合中数值不超过(*n*-2)的元素的个数为：107

通过 NB 集合求得的素数对：

x=1181 *y*=1129　*x*=1187 *y*=1123　*x*=1193 *y*=1117
x=1201 *y*=1109　*x*=1213 *y*=1097　*x*=1217 *y*=1093
x=1223 *y*=1087　*x*=1249 *y*=1061　*x*=1259 *y*=1051
x=1277 *y*=1033　*x*=1279 *y*=1031　*x*=1289 *y*=1021
x=1291 *y*=1019　*x*=1297 *y*=1013　*x*=1301 *y*=1009
x=1319 *y*=0991　*x*=1327 *y*=0983　*x*=1373 *y*=0937
x=1381 *y*=0929　*x*=1399 *y*=0911　*x*=1423 *y*=0887
x=1427 *y*=0883　*x*=1429 *y*=0881　*x*=1433 *y*=0877
x=1447 *y*=0863　*x*=1451 *y*=0859　*x*=1453 *y*=0857
x=1471 *y*=0839　*x*=1481 *y*=0829　*x*=1483 *y*=0827

x=1487 y=0823　x=1489 y=0821　x=1499 y=0811
x=1523 y=0787　x=1549 y=0761　x=1553 y=0757
x=1559 y=0751　x=1567 y=0743　x=1571 y=0739
x=1583 y=0727　x=1601 y=0709　x=1609 y=0701
x=1619 y=0691　x=1627 y=0683　x=1637 y=0673
x=1657 y=0653　x=1663 y=0647　x=1667 y=0643
x=1669 y=0641　x=1693 y=0617　x=1697 y=0613
x=1709 y=0601　x=1723 y=0587　x=1733 y=0577
x=1741 y=0569　x=1747 y=0563　x=1753 y=0557
x=1787 y=0523　x=1789 y=0521　x=1801 y=0509
x=1811 y=0499　x=1823 y=0487　x=1831 y=0479
x=1847 y=0463　x=1861 y=0449　x=1867 y=0443
x=1871 y=0439　x=1877 y=0433　x=1879 y=0431
x=1889 y=0421　x=1901 y=0409　x=1913 y=0397
x=1931 y=0379　x=1951 y=0359　x=1973 y=0337
x=1979 y=0331　x=1993 y=0317　x=1997 y=0313
x=1999 y=0311　x=2003 y=0307　x=2017 y=0293
x=2027 y=0283　x=2029 y=0281　x=2039 y=0271
x=2053 y=0257　x=2069 y=0241　x=2081 y=0229
x=2083 y=0227　x=2087 y=0223　x=2099 y=0211
x=2111 y=0199　x=2113 y=0197　x=2129 y=0181
x=2131 y=0179　x=2137 y=0173　x=2143 y=0167
x=2153 y=0157　x=2161 y=0149　x=2179 y=0131
x=2203 y=0107　x=2207 y=0103　x=2213 y=0097
x=2221 y=0089　x=2237 y=0073　x=2239 y=0071
x=2243 y=0067　x=2251 y=0059

从集合 PB 中求得的解的个数为：7

通过 PB 集合求得的素数对：

x=0013 y=2297　x=0017 y=2293　x=0023 y=2287
x=0029 y=2281　x=0037 y=2273　x=0041 y=2269

x=0043 y=2267

偶数 2310 的满足哥德巴赫猜想的全解的个数共计：114 对

输入的偶数 a 为：2326　$n=a/2$

n 为素数，即：x=1163　y=1163 为一对解

NB 集合中数值不超过(n-2)的各元素的值为：54 60 66 114 144 210 276 324 336 390 420 444 504 546 570 660 684 714 744 810 816 900 906 924 936 966 990 1050 1074 1080 1104 1110

NB 集合中数值不超过(n-2)的元素的个数为：32

通过 NB 集合求得的素数对：

x=1217 y=1109　x=1223 y=1103　x=1229 y=1097
x=1277 y=1049　x=1307 y=1019　x=1373 y=0953
x=1439 y=0887　x=1487 y=0839　x=1499 y=0827
x=1553 y=0773　x=1583 y=0743　x=1607 y=0719
x=1667 y=0659　x=1709 y=0617　x=1733 y=0593
x=1823 y=0503　x=1847 y=0479　x=1877 y=0449
x=1907 y=0419　x=1973 y=0353　x=1979 y=0347
x=2063 y=0263　x=2069 y=0257　x=2087 y=0239
x=2099 y=0227　x=2129 y=0197　x=2153 y=0173
x=2213 y=0113　x=2237 y=0089　x=2243 y=0083
x=2267 y=0059　x=2273 y=0053

从集合 PB 中求得的解的个数为：2

通过 PB 求得的素数对：

x=0017 y=2309　x=0029 y=2297

偶数 2326 的满足哥德巴赫猜想的全解的个数共计：35 对

输入的偶数 a 为：90090　$n=a/2$

NB 集合中数值不超过(n-2)的各元素的值为：32 38 74 82 86 92 136 152 202 236 248 272 274 292 316 344 358 388 394 458 496 508 512 544 554 596 628 662 772 776 778 782 788 796 824 842 914 926 934 944 1004 1016 1028 1048 1054 1058 1102 1154 1192 1256 1262 1264 1292 1354 1394 1396 1412 1432 1454 1466 1504 1528 1546 1588 1594 1604 1618 1634 1642 1646 1724 1726 1762 1774 1784 1808 1822 1844 1856 1912 1952 1996 2042 2066 2078 2084 2092 2102 2116 2144 2192 2206 2224 2248 2252 2258 2272 2294 2308 2318 2336 2342 2344 2362 2396 2456 2468 2476 2488 2536 2546 2554 2578 2584 2594 2608 2612 2636 2654 2666 2672 2696 2746 2752 2762 2764 2824 2836 2858 2866 2888 2906 2972 2984 3028 3046 3064 3076 3086 3118 3134 3142 3148 3152 3194 3202 3236 3268 3308 3326 3364 3404 3418 3428 3434 3436 3442 3452 3496 3526 3566 3578 3602 3632 3634 3688 3712 3764 3776 3802 3812 3814 3824 3844 3862 3902 3928 3964 3988 3998 4072 4112 4148 4162 4166 4178 4216 4232 4286 4294 4346 4348 4406 4418 4436 4454 4486 4502 4514 4552 4558 4618 4622 4694 4702 4756 4762 4808 4832 4876 4882 4892 4894 4946 5006 5008 5032 5056 5066 5074 5108 5162 5176 5182 5216 5218 5246 5266 5276 5284 5296 5318 5342 5366 5378 5414 5482 5494 5504 5536 5542 5546 5602 5606 5626 5662 5678 5722 5728 5732 5744 5794 5804 5812 5828 5846 5864 5884 5906 5912 5926 5948 5956 5998 6002 6026 6086 6092 6112 6124 6154 6172 6184 6194 6212 6242 6262 6296 6298 6316 6338 6368 6374 6376 6392 6394 6416 6434 6436 6442 6476 6586 6592 6614 6668 6674 6724 6742 6758 6772 6784 6808 6814 6826 6848 6862 6868 6896 6926 6932 6976 7006 7058 7082 7138 7156 7192 7214 7246 7346 7388 7412 7456 7466 7472 7484 7496 7498 7508 7516 7534 7538 7582 7622 7666 7676 7682 7688 7724 7738 7768 7772 7792 7844 7856 7874 7906 7922 7928 7958 8006 8024 8032 8042 8048 8072 8102 8116 8126 8144 8188

8224 8236 8254 8264 8278 8332 8336 8362 8374 8392 8408 8458
8462 8482 8504 8548 8552 8566 8572 8578 8588 8594 8612 8672
8732 8738 8746 8768 8804 8816 8836 8854 8894 8914 8948 9038
9046 9076 9094 9122 9148 9206 9242 9248 9274 9286 9316 9368
9374 9448 9452 9454 9472 9476 9502 9514 9518 9536 9538 9584
9622 9664 9682 9706 9722 9728 9734 9754 9788 9824 9874 9896
9904 9928 9934 9938 9956 9964 9976 10064 10082 10126 10162
10168 10174 10198 10204 10286 10288 10298 10306 10366 10394
10396 10442 10456 10496 10502 10534 10544 10558 10574 10576
10588 10616 10676 10718 10742 10748 10762 10772 10778 10784
10792 10886 10888 10904 10922 11048 11078 11104 11122 11134
11152 11194 11218 11254 11288 11324 11332 11398 11408 11422
11428 11432 11444 11456 11458 11464 11482 11498 11524 11552
11566 11584 11588 11618 11636 11642 11668 11686 11692 11702
11728 11734 11798 11846 11864 11866 11884 11896 11938 11954
11992 11996 12032 12052 12062 12074 12104 12128 12134 12158
12176 12206 12214 12242 12256 12328 12338 12352 12412 12442
12458 12482 12484 12512 12514 12542 12548 12604 12622 12634
12644 12664 12668 12674 12682 12686 12692 12736 12742 12746
12748 12784 12794 12808 12854 12856 12872 12902 12928 12946
12968 12982 12986 13016 13054 13064 13154 13162 13172 13186
13198 13276 13318 13322 13324 13346 13358 13382 13396 13498
13504 13528 13534 13556 13568 13648 13654 13666 13688 13712
13718 13726 13786 13852 13856 13862 13864 13868 13892 13898
13922 13964 13966 13976 14006 14032 14062 14068 14074 14096
14104 14114 14152 14164 14174 14176 14194 14228 14236 14288
14332 14342 14348 14374 14396 14402 14408 14452 14468 14516
14536 14576 14614 14618 14654 14678 14698 14726 14752 14834
14842 14876 14884 14906 14912 14926 14936 14954 15032 15056
15062 15124 15164 15172 15178 15212 15226 15286 15292 15328

15382 15404 15412 15464 15476 15544 15562 15572 15592 15602
15616 15634 15644 15658 15682 15712 15718 15734 15748 15776
15814 15824 15844 15854 15872 15878 15892 15898 15908 15916
15982 15986 16012 16084 16096 16124 16166 16178 16186 16208
16238 16252 16286 16294 16334 16358 16396 16418 16424 16426
16438 16442 16448 16466 16474 16498 16508 16568 16582 16598
16606 16612 16636 16642 16658 16736 16768 16816 16826 16834
16864 16882 16922 16934 16936 16946 16958 16994 17026 17084
17092 17098 17126 17144 17162 17228 17252 17254 17266 17278
17282 17302 17306 17356 17372 17414 17428 17462 17494 17504
17518 17536 17558 17588 17608 17614 17638 17678 17708 17716
17746 17774 17806 17936 17938 17942 17984 17986 18014 18028
18034 18052 18058 18086 18152 18154 18166 18196 18232 18268
18286 18308 18316 18322 18332 18344 18346 18352 18364 18376
18398 18418 18448 18454 18488 18532 18544 18556 18566 18614
18622 18646 18652 18658 18674 18698 18728 18736 18748 18778
18794 18796 18808 18818 18856 18862 18868 18884 18904 18932
18962 18992 19046 19064 19106 19112 19126 19142 19172 19178
19226 19274 19282 19328 19388 19406 19444 19468 19508 19522
19576 19582 19588 19622 19634 19672 19702 19736 19738 19808
19826 19856 19874 19876 19882 19892 19924 19958 19988 20008
20056 20066 20074 20078 20102 20122 20126 20128 20138 20168
20194 20224 20264 20278 20282 20312 20336 20348 20362 20368
20374 20434 20452 20474 20494 20498 20512 20518 20536 20564
20572 20602 20606 20632 20654 20672 20674 20686 20716 20764
20794 20798 20806 20822 20876 20912 20936 20938 20948 20984
20996 21002 21022 21026 21038 21044 21064 21116 21128 21134
21146 21176 21226 21256 21292 21298 21302 21358 21368 21412
21418 21422 21446 21464 21478 21484 21488 21496 21508 21548
21572 21598 21676 21688 21706 21718 21752 21776 21818 21844

21878 21886 21902 21914 21928 21958 21988 22004 22016 22028
22034 22084 22108 22124 22144 22168 22174 22186 22228 22262
22294 22304 22324 22346 22354 22366 22376 22402 22408 22432
22478 22502 22514 22534 22544 22562 22654 22664 22678 22696
22738 22762 22774 22798 22856 22886 22888 22898 22912 22916
22922 22934 22978 23008 23014 23042 23054 23068 23102 23116
23164 23174 23182 23194 23306 23344 23398 23428 23432 23444
23446 23456 23476 23486 23522 23552 23638 23654 23666 23668
23698 23704 23722 23726 23732 23768 23776 23818 23834 23852
23854 23858 23882 23902 23956 23984 23986 24022 24028 24064
24082 24098 24106 24146 24148 24158 24188 24272 24292 24296
24326 24338 24382 24418 24446 24452 24494 24512 24646 24652
24692 24718 24722 24776 24784 24812 24814 24884 24896 24956
24974 24994 25016 25022 25034 25054 25066 25072 25096 25118
25132 25154 25156 25178 25184 25192 25204 25226 25244 25252
25268 25282 25306 25328 25336 25348 25384 25436 25442 25462
25492 25504 25538 25544 25562 25574 25576 25582 25612 25618
25622 25642 25664 25672 25778 25796 25808 25832 25834 25904
25906 25924 25966 25994 26014 26036 26044 26098 26126 26146
26242 26248 26272 26288 26296 26302 26314 26344 26354 26366
26374 26384 26408 26428 26458 26492 26504 26506 26524 26552
26588 26602 26618 26648 26666 26674 26716 26732 26744 26776
26792 26816 26822 26834 26854 26864 26896 26902 26918 26926
26948 26986 26998 27002 27032 27056 27058 27064 27116 27122
27124 27182 27206 27208 27262 27296 27308 27338 27376 27386
27422 27436 27448 27506 27568 27578 27602 27626 27628 27644
27656 27662 27694 27718 27752 27814 27838 27856 27862 27878
27886 27908 27928 27952 27968 27992 27998 28016 28018 28034
28082 28144 28214 28258 28282 28286 28316 28342 28372 28388
28414 28426 28438 28472 28478 28484 28516 28526 28552 28564

28568 28592 28598 28628 28634 28664 28676 28682 28706 28712
28726 28778 28814 28822 28852 28862 28906 28954 28972 28976
28982 29054 29086 29122 29132 29144 29156 29158 29164 29186
29242 29248 29272 29278 29308 29312 29318 29366 29374 29396
29404 29426 29444 29462 29464 29476 29486 29552 29578 29654
29662 29668 29672 29684 29686 29714 29716 29726 29776 29782
29786 29812 29828 29846 29852 29858 29884 29896 29914 29968
29972 29984 29992 30088 30116 30122 30148 30166 30178 30194
30224 30232 30262 30278 30292 30308 30322 30332 30346 30362
30392 30482 30488 30494 30496 30508 30512 30526 30566 30584
30596 30608 30614 30634 30638 30644 30658 30676 30698 30722
30742 30752 30824 30838 30868 30886 30892 30896 30938 30958
30994 31034 31036 31046 31078 31112 31114 31162 31168 31186
31204 31214 31216 31238 31288 31322 31324 31334 31358 31376
31396 31418 31426 31448 31492 31558 31604 31628 31634 31708
31732 31736 31786 31826 31828 31862 31868 31874 31898 31918
31946 31996 32002 32036 32092 32122 32126 32146 32156 32192
32204 32216 32222 32224 32246 32302 32306 32324 32332 32374
32386 32426 32432 32434 32444 32468 32476 32498 32504 32506
32518 32528 32542 32566 32572 32636 32644 32654 32666 32668
32698 32702 32716 32756 32768 32794 32804 32818 32848 32884
32888 32932 32938 32972 32996 33004 33034 33076 33092 33112
33118 33122 33148 33158 33214 33232 33238 33256 33262 33266
33302 33356 33452 33466 33494 33496 33526 33548 33562 33578
33598 33608 33646 33652 33662 33676 33692 33734 33746 33758
33794 33832 33848 33874 33884 33896 33932 33986 33998 34018
34042 34058 34066 34088 34106 34108 34136 34142 34156 34184
34186 34214 34256 34264 34274 34292 34312 34322 34334 34354
34378 34382 34388 34406 34448 34486 34514 34516 34544 34568
34582 34586 34588 34612 34646 34654 34712 34724 34732 34756

34772 34778 34798 34802 34822 34894 34934 34942 34952 34954
34976 35006 35096 35104 35122 35162 35186 35188 35194 35206
35228 35234 35242 35264 35296 35302 35324 35384 35402 35426
35444 35512 35554 35566 35582 35584 35606 35612 35624 35626
35632 35642 35668 35702 35704 35734 35764 35788 35804 35818
35864 35872 35884 35888 35908 35918 35978 35986 35996 36002
36004 36032 36038 36074 36112 36152 36158 36178 36238 36262
36298 36304 36308 36314 36326 36356 36364 36376 36418 36464
36472 36482 36502 36506 36508 36518 36524 36584 36602 36622
36626 36656 36658 36682 36692 36716 36728 36754 36772 36802
36808 36824 36854 36874 36884 36898 36922 36928 36958 36964
36976 36986 36992 37006 37028 37094 37096 37108 37118 37126
37138 37144 37162 37172 37178 37192 37216 37222 37256 37304
37328 37342 37376 37424 37438 37442 37454 37462 37484 37486
37504 37516 37522 37546 37556 37564 37568 37588 37612 37676
37712 37714 37736 37748 37792 37802 37838 37858 37868 37894
37918 37936 38002 38018 38026 38032 38044 38048 38162 38174
38176 38182 38188 38212 38222 38254 38266 38312 38344 38354
38356 38372 38386 38392 38426 38492 38516 38564 38572 38576
38594 38596 38618 38656 38672 38692 38716 38728 38746 38768
38788 38798 38824 38828 38846 38894 38924 38966 38972 39002
39008 39016 39092 39118 39166 39176 39178 39184 39194 39202
39218 39254 39262 39302 39304 39344 39356 39362 39376 39386
39392 39398 39404 39422 39454 39464 39476 39488 39514 39544
39604 39608 39614 39628 39646 39652 39742 39748 39764 39766
39812 39814 39874 39932 39946 39964 40036 40042 40046 40058
40076 40088 40102 40114 40156 40168 40184 40214 40252 40258
40286 40316 40324 40366 40382 40394 40402 40406 40408 40424
40442 40478 40526 40532 40552 40562 40582 40594 40598 40622
40624 40672 40688 40706 40748 40772 40774 40784 40786 40792

40802 40844 40886 40888 40946 40954 40966 40972 41024 41032
41038 41098 41116 41126 41134 41138 41156 41164 41194 41198
41212 41224 41242 41248 41252 41266 41278 41306 41312 41326
41336 41344 41354 41368 41408 41422 41432 41464 41486 41488
41516 41528 41534 41554 41582 41584 41632 41674 41684 41698
41722 41726 41738 41792 41816 41824 41878 41882 41924 41936
41966 41996 42004 42026 42074 42076 42088 42106 42136 42142
42166 42208 42212 42248 42254 42268 42278 42292 42314 42338
42358 42362 42382 42388 42398 42428 42436 42466 42494 42496
42502 42514 42542 42568 42578 42586 42598 42604 42634 42646
42652 42656 42674 42694 42698 42706 42748 42752 42758 42808
42824 42832 42842 42866 42914 42916 42932 42946 42956 42958
42962 42992 43034 43048 43072 43132 43166 43178 43214 43244
43256 43292 43352 43378 43382 43418 43424 43426 43448 43478
43502 43546 43562 43564 43598 43606 43612 43616 43618 43622
43636 43684 43726 43744 43748 43754 43756 43762 43766 43768
43808 43816 43822 43828 43852 43858 43874 43892 43948 43952
43958 43976 43996 44006 44012 44024 44026 44062 44068 44074
44078 44092 44108 44158 44164 44168 44182 44186 44192 44216
44224 44248 44258 44272 44284 44318 44326 44336 44354 44368
44372 44386 44398 44404 44414 44432 44446 44468 44474 44476
44482 44488 44522 44546 44554 44558 44566 44582 44588 44612
44614 44624 44626 44636 44644 44708 44714 44734 44738

NB 集合中数值不超过(n-2)的元素的个数为：2103

通过 NB 集合求得的素数对：

x=45077 y=45013　x=45083 y=45007　x=45119 y=44971
x=45127 y=44963　x=45131 y=44959　x=45137 y=44953
x=45181 y=44909　x=45197 y=44893　x=45247 y=44843
x=45281 y=44809　x=45293 y=44797　x=45317 y=44773

x=45319 y=44771　x=45337 y=44753　x=45361 y=44729
x=45389 y=44701　x=45403 y=44687　x=45433 y=44657
x=45439 y=44651　x=45503 y=44587　x=45541 y=44549
x=45553 y=44537　x=45557 y=44533　x=45589 y=44501
x=45599 y=44491　x=45641 y=44449　x=45673 y=44417
x=45707 y=44383　x=45817 y=44273　x=45821 y=44269
x=45823 y=44267　x=45827 y=44263　x=45833 y=44257
x=45841 y=44249　x=45869 y=44221　x=45887 y=44203
x=45959 y=44131　x=45971 y=44119　x=45979 y=44111
x=45989 y=44101　x=46049 y=44041　x=46061 y=44029
x=46073 y=44017　x=46093 y=43997　x=46099 y=43991
x=46103 y=43987　x=46147 y=43943　x=46199 y=43891
x=46237 y=43853　x=46301 y=43789　x=46307 y=43783
x=46309 y=43781　x=46337 y=43753　x=46399 y=43691
x=46439 y=43651　x=46441 y=43649　x=46457 y=43633
x=46477 y=43613　x=46499 y=43591　x=46511 y=43579
x=46549 y=43541　x=46573 y=43517　x=46591 y=43499
x=46633 y=43457　x=46639 y=43451　x=46649 y=43441
x=46663 y=43427　x=46679 y=43411　x=46687 y=43403
x=46691 y=43399　x=46769 y=43321　x=46771 y=43319
x=46807 y=43283　x=46819 y=43271　x=46829 y=43261
x=46853 y=43237　x=46867 y=43223　x=46889 y=43201
x=46901 y=43189　x=46957 y=43133　x=46997 y=43093
x=47041 y=43049　x=47087 y=43003　x=47111 y=42979
x=47123 y=42967　x=47129 y=42961　x=47137 y=42953
x=47147 y=42943　x=47161 y=42929　x=47189 y=42901
x=47237 y=42853　x=47251 y=42839　x=47269 y=42821
x=47293 y=42797　x=47297 y=42793　x=47303 y=42787
x=47317 y=42773　x=47339 y=42751　x=47353 y=42737
x=47363 y=42727　x=47381 y=42709　x=47387 y=42703

x=47389 y=42701 x=47407 y=42683 x=47441 y=42649
x=47501 y=42589 x=47513 y=42577 x=47521 y=42569
x=47533 y=42557 x=47581 y=42509 x=47591 y=42499
x=47599 y=42491 x=47623 y=42467 x=47629 y=42461
x=47639 y=42451 x=47653 y=42437 x=47657 y=42433
x=47681 y=42409 x=47699 y=42391 x=47711 y=42379
x=47717 y=42373 x=47741 y=42349 x=47791 y=42299
x=47797 y=42293 x=47807 y=42283 x=47809 y=42281
x=47869 y=42221 x=47881 y=42209 x=47903 y=42187
x=47911 y=42179 x=47933 y=42157 x=47951 y=42139
x=48017 y=42073 x=48029 y=42061 x=48073 y=42017
x=48091 y=41999 x=48109 y=41981 x=48121 y=41969
x=48131 y=41959 x=48163 y=41927 x=48179 y=41911
x=48187 y=41903 x=48193 y=41897 x=48197 y=41893
x=48239 y=41851 x=48247 y=41843 x=48281 y=41809
x=48313 y=41777 x=48353 y=41737 x=48371 y=41719
x=48409 y=41681 x=48449 y=41641 x=48463 y=41627
x=48473 y=41617 x=48479 y=41611 x=48481 y=41609
x=48487 y=41603 x=48497 y=41593 x=48541 y=41549
x=48571 y=41519 x=48611 y=41479 x=48623 y=41467
x=48647 y=41443 x=48677 y=41413 x=48679 y=41411
x=48733 y=41357 x=48757 y=41333 x=48809 y=41281
x=48821 y=41269 x=48847 y=41243 x=48857 y=41233
x=48859 y=41231 x=48869 y=41221 x=48889 y=41201
x=48907 y=41183 x=48947 y=41143 x=48973 y=41117
x=49009 y=41081 x=49033 y=41057 x=49043 y=41047
x=49117 y=40973 x=49157 y=40933 x=49193 y=40897
x=49207 y=40883 x=49211 y=40879 x=49223 y=40867
x=49261 y=40829 x=49277 y=40813 x=49331 y=40759
x=49339 y=40751 x=49391 y=40699 x=49393 y=40697

$x=49451$ $y=40639$　$x=49463$ $y=40627$　$x=49481$ $y=40609$
$x=49499$ $y=40591$　$x=49531$ $y=40559$　$x=49547$ $y=40543$
$x=49559$ $y=40531$　$x=49597$ $y=40493$　$x=49603$ $y=40487$
$x=49663$ $y=40427$　$x=49667$ $y=40423$　$x=49739$ $y=40351$
$x=49747$ $y=40343$　$x=49801$ $y=40289$　$x=49807$ $y=40283$
$x=49853$ $y=40237$　$x=49877$ $y=40213$　$x=49921$ $y=40169$
$x=49927$ $y=40163$　$x=49937$ $y=40153$　$x=49939$ $y=40151$
$x=49991$ $y=40099$　$x=50051$ $y=40039$　$x=50053$ $y=40037$
$x=50077$ $y=40013$　$x=50101$ $y=39989$　$x=50111$ $y=39979$
$x=50119$ $y=39971$　$x=50153$ $y=39937$　$x=50207$ $y=39883$
$x=50221$ $y=39869$　$x=50227$ $y=39863$　$x=50261$ $y=39829$
$x=50263$ $y=39827$　$x=50291$ $y=39799$　$x=50311$ $y=39779$
$x=50321$ $y=39769$　$x=50329$ $y=39761$　$x=50341$ $y=39749$
$x=50363$ $y=39727$　$x=50387$ $y=39703$　$x=50411$ $y=39679$
$x=50423$ $y=39667$　$x=50459$ $y=39631$　$x=50527$ $y=39563$
$x=50539$ $y=39551$　$x=50549$ $y=39541$　$x=50581$ $y=39509$
$x=50587$ $y=39503$　$x=50591$ $y=39499$　$x=50647$ $y=39443$
$x=50651$ $y=39439$　$x=50671$ $y=39419$　$x=50707$ $y=39383$
$x=50723$ $y=39367$　$x=50767$ $y=39323$　$x=50773$ $y=39317$
$x=50777$ $y=39313$　$x=50789$ $y=39301$　$x=50839$ $y=39251$
$x=50849$ $y=39241$　$x=50857$ $y=39233$　$x=50873$ $y=39217$
$x=50891$ $y=39199$　$x=50909$ $y=39181$　$x=50929$ $y=39161$
$x=50951$ $y=39139$　$x=50957$ $y=39133$　$x=50971$ $y=39119$
$x=50993$ $y=39097$　$x=51001$ $y=39089$　$x=51043$ $y=39047$
$x=51047$ $y=39043$　$x=51071$ $y=39019$　$x=51131$ $y=38959$
$x=51137$ $y=38953$　$x=51157$ $y=38933$　$x=51169$ $y=38921$
$x=51199$ $y=38891$　$x=51217$ $y=38873$　$x=51229$ $y=38861$
$x=51239$ $y=38851$　$x=51257$ $y=38833$　$x=51287$ $y=38803$
$x=51307$ $y=38783$　$x=51341$ $y=38749$　$x=51343$ $y=38747$
$x=51361$ $y=38729$　$x=51383$ $y=38707$　$x=51413$ $y=38677$

x=51419 y=38671 x=51421 y=38669 x=51437 y=38653
x=51439 y=38651 x=51461 y=38629 x=51479 y=38611
x=51481 y=38609 x=51487 y=38603 x=51521 y=38569
x=51631 y=38459 x=51637 y=38453 x=51659 y=38431
x=51713 y=38377 x=51719 y=38371 x=51769 y=38321
x=51787 y=38303 x=51803 y=38287 x=51817 y=38273
x=51829 y=38261 x=51853 y=38237 x=51859 y=38231
x=51871 y=38219 x=51893 y=38197 x=51907 y=38183
x=51913 y=38177 x=51941 y=38149 x=51971 y=38119
x=51977 y=38113 x=52021 y=38069 x=52051 y=38039
x=52103 y=37987 x=52127 y=37963 x=52183 y=37907
x=52201 y=37889 x=52237 y=37853 x=52259 y=37831
x=52291 y=37799 x=52391 y=37699 x=52433 y=37657
x=52457 y=37633 x=52501 y=37589 x=52511 y=37579
x=52517 y=37573 x=52529 y=37561 x=52541 y=37549
x=52543 y=37547 x=52553 y=37537 x=52561 y=37529
x=52579 y=37511 x=52583 y=37507 x=52627 y=37463
x=52667 y=37423 x=52711 y=37379 x=52721 y=37369
x=52727 y=37363 x=52733 y=37357 x=52769 y=37321
x=52783 y=37307 x=52813 y=37277 x=52817 y=37273
x=52837 y=37253 x=52889 y=37201 x=52901 y=37189
x=52919 y=37171 x=52951 y=37139 x=52967 y=37123
x=52973 y=37117 x=53003 y=37087 x=53051 y=37039
x=53069 y=37021 x=53077 y=37013 x=53087 y=37003
x=53093 y=36997 x=53117 y=36973 x=53147 y=36943
x=53161 y=36929 x=53171 y=36919 x=53189 y=36901
x=53233 y=36857 x=53269 y=36821 x=53281 y=36809
x=53299 y=36791 x=53309 y=36781 x=53323 y=36767
x=53377 y=36713 x=53381 y=36709 x=53407 y=36683
x=53419 y=36671 x=53437 y=36653 x=53453 y=36637

$x=53503$ $y=36587$　$x=53507$ $y=36583$　$x=53527$ $y=36563$
$x=53549$ $y=36541$　$x=53593$ $y=36497$　$x=53597$ $y=36493$
$x=53611$ $y=36479$　$x=53617$ $y=36473$　$x=53623$ $y=36467$
$x=53633$ $y=36457$　$x=53639$ $y=36451$　$x=53657$ $y=36433$
$x=53717$ $y=36373$　$x=53777$ $y=36313$　$x=53783$ $y=36307$
$x=53791$ $y=36299$　$x=53813$ $y=36277$　$x=53849$ $y=36241$
$x=53861$ $y=36229$　$x=53881$ $y=36209$　$x=53899$ $y=36191$
$x=53939$ $y=36151$　$x=53959$ $y=36131$　$x=53993$ $y=36097$
$x=54083$ $y=36007$　$x=54091$ $y=35999$　$x=54121$ $y=35969$
$x=54139$ $y=35951$　$x=54167$ $y=35923$　$x=54193$ $y=35897$
$x=54251$ $y=35839$　$x=54287$ $y=35803$　$x=54293$ $y=35797$
$x=54319$ $y=35771$　$x=54331$ $y=35759$　$x=54361$ $y=35729$
$x=54413$ $y=35677$　$x=54419$ $y=35671$　$x=54493$ $y=35597$
$x=54497$ $y=35593$　$x=54499$ $y=35591$　$x=54517$ $y=35573$
$x=54521$ $y=35569$　$x=54547$ $y=35543$　$x=54559$ $y=35531$
$x=54563$ $y=35527$　$x=54581$ $y=35509$　$x=54583$ $y=35507$
$x=54629$ $y=35461$　$x=54667$ $y=35423$　$x=54709$ $y=35381$
$x=54727$ $y=35363$　$x=54751$ $y=35339$　$x=54767$ $y=35323$
$x=54773$ $y=35317$　$x=54779$ $y=35311$　$x=54799$ $y=35291$
$x=54833$ $y=35257$　$x=54869$ $y=35221$　$x=54919$ $y=35171$
$x=54941$ $y=35149$　$x=54949$ $y=35141$　$x=54973$ $y=35117$
$x=54979$ $y=35111$　$x=54983$ $y=35107$　$x=55001$ $y=35089$
$x=55009$ $y=35081$　$x=55021$ $y=35069$　$x=55109$ $y=34981$
$x=55127$ $y=34963$　$x=55171$ $y=34919$　$x=55207$ $y=34883$
$x=55213$ $y=34877$　$x=55219$ $y=34871$　$x=55243$ $y=34847$
$x=55249$ $y=34841$　$x=55331$ $y=34759$　$x=55333$ $y=34757$
$x=55343$ $y=34747$　$x=55351$ $y=34739$　$x=55411$ $y=34679$
$x=55439$ $y=34651$　$x=55441$ $y=34649$　$x=55487$ $y=34603$
$x=55501$ $y=34589$　$x=55541$ $y=34549$　$x=55547$ $y=34543$
$x=55579$ $y=34511$　$x=55589$ $y=34501$　$x=55603$ $y=34487$

x=55619 y=34471 x=55621 y=34469 x=55633 y=34457
x=55661 y=34429 x=55721 y=34369 x=55763 y=34327
x=55787 y=34303 x=55793 y=34297 x=55807 y=34283
x=55817 y=34273 x=55823 y=34267 x=55829 y=34261
x=55837 y=34253 x=55931 y=34159 x=55933 y=34157
x=55949 y=34141 x=55967 y=34123 x=56093 y=33997
x=56123 y=33967 x=56149 y=33941 x=56167 y=33923
x=56179 y=33911 x=56197 y=33893 x=56239 y=33851
x=56263 y=33827 x=56299 y=33791 x=56333 y=33757
x=56369 y=33721 x=56377 y=33713 x=56443 y=33647
x=56453 y=33637 x=56467 y=33623 x=56473 y=33617
x=56477 y=33613 x=56489 y=33601 x=56501 y=33589
x=56503 y=33587 x=56509 y=33581 x=56527 y=33563
x=56543 y=33547 x=56569 y=33521 x=56597 y=33493
x=56611 y=33479 x=56629 y=33461 x=56633 y=33457
x=56663 y=33427 x=56681 y=33409 x=56687 y=33403
x=56713 y=33377 x=56731 y=33359 x=56737 y=33353
x=56747 y=33343 x=56773 y=33317 x=56779 y=33311
x=56843 y=33247 x=56891 y=33199 x=56909 y=33181
x=56911 y=33179 x=56929 y=33161 x=56941 y=33149
x=56983 y=33107 x=56999 y=33091 x=57037 y=33053
x=57041 y=33049 x=57077 y=33013 x=57097 y=32993
x=57107 y=32983 x=57119 y=32971 x=57149 y=32941
x=57173 y=32917 x=57179 y=32911 x=57203 y=32887
x=57221 y=32869 x=57251 y=32839 x=57259 y=32831
x=57287 y=32803 x=57301 y=32789 x=57373 y=32717
x=57383 y=32707 x=57397 y=32693 x=57457 y=32633
x=57487 y=32603 x=57503 y=32587 x=57527 y=32563
x=57529 y=32561 x=57557 y=32533 x=57559 y=32531
x=57587 y=32503 x=57593 y=32497 x=57649 y=32441

x=57667 y=32423　x=57679 y=32411　x=57689 y=32401
x=57709 y=32381　x=57713 y=32377　x=57719 y=32371
x=57727 y=32363　x=57731 y=32359　x=57737 y=32353
x=57781 y=32309　x=57787 y=32303　x=57791 y=32299
x=57793 y=32297　x=57829 y=32261　x=57839 y=32251
x=57853 y=32237　x=57899 y=32191　x=57901 y=32189
x=57917 y=32173　x=57947 y=32143　x=57973 y=32117
x=57991 y=32099　x=58013 y=32077　x=58027 y=32063
x=58031 y=32059　x=58061 y=32029　x=58099 y=31991
x=58109 y=31981　x=58199 y=31891　x=58207 y=31883
x=58217 y=31873　x=58231 y=31859　x=58243 y=31847
x=58321 y=31769　x=58363 y=31727　x=58367 y=31723
x=58369 y=31721　x=58391 y=31699　x=58403 y=31687
x=58427 y=31663　x=58441 y=31649　x=58543 y=31547
x=58549 y=31541　x=58573 y=31517　x=58579 y=31511
x=58601 y=31489　x=58613 y=31477　x=58693 y=31397
x=58699 y=31391　x=58711 y=31379　x=58733 y=31357
x=58757 y=31333　x=58763 y=31327　x=58771 y=31319
x=58831 y=31259　x=58897 y=31193　x=58901 y=31189
x=58907 y=31183　x=58909 y=31181　x=58913 y=31177
x=58937 y=31153　x=58943 y=31147　x=58967 y=31123
x=59009 y=31081　x=59011 y=31079　x=59021 y=31069
x=59051 y=31039　x=59077 y=31013　x=59107 y=30983
x=59113 y=30977　x=59119 y=30971　x=59141 y=30949
x=59149 y=30941　x=59159 y=30931　x=59197 y=30893
x=59209 y=30881　x=59219 y=30871　x=59221 y=30869
x=59239 y=30851　x=59273 y=30817　x=59281 y=30809
x=59333 y=30757　x=59377 y=30713　x=59387 y=30703
x=59393 y=30697　x=59419 y=30671　x=59441 y=30649
x=59447 y=30643　x=59453 y=30637　x=59497 y=30593

x=59513 y=30577 x=59561 y=30529 x=59581 y=30509
x=59621 y=30469 x=59659 y=30431 x=59663 y=30427
x=59699 y=30391 x=59723 y=30367 x=59743 y=30347
x=59771 y=30319 x=59797 y=30293 x=59879 y=30211
x=59887 y=30203 x=59921 y=30169 x=59929 y=30161
x=59951 y=30139 x=59957 y=30133 x=59971 y=30119
x=59981 y=30109 x=59999 y=30091 x=60077 y=30013
x=60101 y=29989 x=60107 y=29983 x=60169 y=29921
x=60209 y=29881 x=60217 y=29873 x=60223 y=29867
x=60257 y=29833 x=60271 y=29819 x=60331 y=29759
x=60337 y=29753 x=60373 y=29717 x=60427 y=29663
x=60449 y=29641 x=60457 y=29633 x=60509 y=29581
x=60521 y=29569 x=60589 y=29501 x=60607 y=29483
x=60617 y=29473 x=60637 y=29453 x=60647 y=29443
x=60661 y=29429 x=60679 y=29411 x=60689 y=29401
x=60703 y=29387 x=60727 y=29363 x=60757 y=29333
x=60763 y=29327 x=60779 y=29311 x=60793 y=29297
x=60821 y=29269 x=60859 y=29231 x=60869 y=29221
x=60889 y=29201 x=60899 y=29191 x=60917 y=29173
x=60923 y=29167 x=60937 y=29153 x=60943 y=29147
x=60953 y=29137 x=60961 y=29129 x=61027 y=29063
x=61031 y=29059 x=61057 y=29033 x=61129 y=28961
x=61141 y=28949 x=61169 y=28921 x=61211 y=28879
x=61223 y=28867 x=61231 y=28859 x=61253 y=28837
x=61283 y=28807 x=61297 y=28793 x=61331 y=28759
x=61339 y=28751 x=61379 y=28711 x=61403 y=28687
x=61441 y=28649 x=61463 y=28627 x=61469 y=28621
x=61471 y=28619 x=61483 y=28607 x=61487 y=28603
x=61493 y=28597 x=61511 y=28579 x=61519 y=28571
x=61543 y=28547 x=61553 y=28537 x=61613 y=28477

$x=61627$ $y=28463$ $x=61643$ $y=28447$ $x=61651$ $y=28439$
$x=61657$ $y=28433$ $x=61681$ $y=28409$ $x=61687$ $y=28403$
$x=61703$ $y=28387$ $x=61781$ $y=28309$ $x=61813$ $y=28277$
$x=61861$ $y=28229$ $x=61871$ $y=28219$ $x=61879$ $y=28211$
$x=61909$ $y=28181$ $x=61927$ $y=28163$ $x=61967$ $y=28123$
$x=61979$ $y=28111$ $x=61981$ $y=28109$ $x=61991$ $y=28099$
$x=62003$ $y=28087$ $x=62039$ $y=28051$ $x=62071$ $y=28019$
$x=62129$ $y=27961$ $x=62137$ $y=27953$ $x=62143$ $y=27947$
$x=62171$ $y=27919$ $x=62189$ $y=27901$ $x=62207$ $y=27883$
$x=62273$ $y=27817$ $x=62297$ $y=27793$ $x=62299$ $y=27791$
$x=62311$ $y=27779$ $x=62323$ $y=27767$ $x=62327$ $y=27763$
$x=62347$ $y=27743$ $x=62351$ $y=27739$ $x=62401$ $y=27689$
$x=62417$ $y=27673$ $x=62459$ $y=27631$ $x=62473$ $y=27617$
$x=62507$ $y=27583$ $x=62539$ $y=27551$ $x=62549$ $y=27541$
$x=62563$ $y=27527$ $x=62581$ $y=27509$ $x=62603$ $y=27487$
$x=62633$ $y=27457$ $x=62653$ $y=27437$ $x=62659$ $y=27431$
$x=62683$ $y=27407$ $x=62723$ $y=27367$ $x=62753$ $y=27337$
$x=62761$ $y=27329$ $x=62791$ $y=27299$ $x=62819$ $y=27271$
$x=62851$ $y=27239$ $x=62981$ $y=27109$ $x=62983$ $y=27107$
$x=62987$ $y=27103$ $x=63029$ $y=27061$ $x=63031$ $y=27059$
$x=63059$ $y=27031$ $x=63073$ $y=27017$ $x=63079$ $y=27011$
$x=63097$ $y=26993$ $x=63103$ $y=26987$ $x=63131$ $y=26959$
$x=63197$ $y=26893$ $x=63199$ $y=26891$ $x=63211$ $y=26879$
$x=63241$ $y=26849$ $x=63277$ $y=26813$ $x=63313$ $y=26777$
$x=63331$ $y=26759$ $x=63353$ $y=26737$ $x=63361$ $y=26729$
$x=63367$ $y=26723$ $x=63377$ $y=26713$ $x=63389$ $y=26701$
$x=63391$ $y=26699$ $x=63397$ $y=26693$ $x=63409$ $y=26681$
$x=63421$ $y=26669$ $x=63443$ $y=26647$ $x=63463$ $y=26627$
$x=63493$ $y=26597$ $x=63499$ $y=26591$ $x=63533$ $y=26557$
$x=63577$ $y=26513$ $x=63589$ $y=26501$ $x=63601$ $y=26489$

x=63611 y=26479 x=63659 y=26431 x=63667 y=26423
x=63691 y=26399 x=63697 y=26393 x=63703 y=26387
x=63719 y=26371 x=63743 y=26347 x=63773 y=26317
x=63781 y=26309 x=63793 y=26297 x=63823 y=26267
x=63839 y=26251 x=63841 y=26249 x=63853 y=26237
x=63863 y=26227 x=63901 y=26189 x=63907 y=26183
x=63913 y=26177 x=63929 y=26161 x=63949 y=26141
x=63977 y=26113 x=64007 y=26083 x=64037 y=26053
x=64091 y=25999 x=64109 y=25981 x=64151 y=25939
x=64157 y=25933 x=64171 y=25919 x=64187 y=25903
x=64217 y=25873 x=64223 y=25867 x=64271 y=25819
x=64319 y=25771 x=64327 y=25763 x=64373 y=25717
x=64433 y=25657 x=64451 y=25639 x=64489 y=25601
x=64513 y=25577 x=64553 y=25537 x=64567 y=25523
x=64621 y=25469 x=64627 y=25463 x=64633 y=25457
x=64667 y=25423 x=64679 y=25411 x=64717 y=25373
x=64747 y=25343 x=64781 y=25309 x=64783 y=25307
x=64853 y=25237 x=64871 y=25219 x=64901 y=25189
x=64919 y=25171 x=64921 y=25169 x=64927 y=25163
x=64937 y=25153 x=64969 y=25121 x=65003 y=25087
x=65033 y=25057 x=65053 y=25037 x=65101 y=24989
x=65111 y=24979 x=65119 y=24971 x=65123 y=24967
x=65147 y=24943 x=65167 y=24923 x=65171 y=24919
x=65173 y=24917 x=65183 y=24907 x=65213 y=24877
x=65239 y=24851 x=65269 y=24821 x=65309 y=24781
x=65323 y=24767 x=65327 y=24763 x=65357 y=24733
x=65381 y=24709 x=65393 y=24697 x=65407 y=24683
x=65413 y=24677 x=65419 y=24671 x=65479 y=24611
x=65497 y=24593 x=65519 y=24571 x=65539 y=24551
x=65543 y=24547 x=65557 y=24533 x=65563 y=24527

x=65581 y=24509　x=65609 y=24481　x=65617 y=24473
x=65647 y=24443　x=65651 y=24439　x=65677 y=24413
x=65699 y=24391　x=65717 y=24373　x=65719 y=24371
x=65731 y=24359　x=65761 y=24329　x=65809 y=24281
x=65839 y=24251　x=65843 y=24247　x=65851 y=24239
x=65867 y=24223　x=65921 y=24169　x=65957 y=24133
x=65981 y=24109　x=65983 y=24107　x=65993 y=24097
x=66029 y=24061　x=66041 y=24049　x=66047 y=24043
x=66067 y=24023　x=66071 y=24019　x=66083 y=24007
x=66089 y=24001　x=66109 y=23981　x=66161 y=23929
x=66173 y=23917　x=66179 y=23911　x=66191 y=23899
x=66221 y=23869　x=66271 y=23819　x=66301 y=23789
x=66337 y=23753　x=66343 y=23747　x=66347 y=23743
x=66403 y=23687　x=66413 y=23677　x=66457 y=23633
x=66463 y=23627　x=66467 y=23623　x=66491 y=23599
x=66509 y=23581　x=66523 y=23567　x=66529 y=23561
x=66533 y=23557　x=66541 y=23549　x=66553 y=23537
x=66593 y=23497　x=66617 y=23473　x=66643 y=23447
x=66721 y=23369　x=66733 y=23357　x=66751 y=23339
x=66763 y=23327　x=66797 y=23293　x=66821 y=23269
x=66863 y=23227　x=66889 y=23201　x=66923 y=23167
x=66931 y=23159　x=66947 y=23143　x=66959 y=23131
x=66973 y=23117　x=67003 y=23087　x=67033 y=23057
x=67049 y=23041　x=67061 y=23029　x=67073 y=23017
x=67079 y=23011　x=67129 y=22961　x=67153 y=22937
x=67169 y=22921　x=67189 y=22901　x=67213 y=22877
x=67219 y=22871　x=67231 y=22859　x=67273 y=22817
x=67307 y=22783　x=67339 y=22751　x=67349 y=22741
x=67369 y=22721　x=67391 y=22699　x=67399 y=22691
x=67411 y=22679　x=67421 y=22669　x=67447 y=22643

x=67453 y=22637 x=67477 y=22613 x=67523 y=22567
x=67547 y=22543 x=67559 y=22531 x=67579 y=22511
x=67589 y=22501 x=67607 y=22483 x=67699 y=22391
x=67709 y=22381 x=67723 y=22367 x=67741 y=22349
x=67783 y=22307 x=67807 y=22283 x=67819 y=22271
x=67843 y=22247 x=67901 y=22189 x=67931 y=22159
x=67933 y=22157 x=67943 y=22147 x=67957 y=22133
x=67961 y=22129 x=67967 y=22123 x=67979 y=22111
x=68023 y=22067 x=68053 y=22037 x=68059 y=22031
x=68087 y=22003 x=68099 y=21991 x=68113 y=21977
x=68147 y=21943 x=68161 y=21929 x=68209 y=21881
x=68219 y=21871 x=68227 y=21863 x=68239 y=21851
x=68351 y=21739 x=68389 y=21701 x=68443 y=21647
x=68473 y=21617 x=68477 y=21613 x=68489 y=21601
x=68491 y=21599 x=68501 y=21589 x=68521 y=21569
x=68531 y=21559 x=68567 y=21523 x=68597 y=21493
x=68683 y=21407 x=68699 y=21391 x=68711 y=21379
x=68713 y=21377 x=68743 y=21347 x=68749 y=21341
x=68767 y=21323 x=68771 y=21319 x=68777 y=21313
x=68813 y=21277 x=68821 y=21269 x=68863 y=21227
x=68879 y=21211 x=68897 y=21193 x=68899 y=21191
x=68903 y=21187 x=68927 y=21163 x=68947 y=21143
x=69001 y=21089 x=69029 y=21061 x=69031 y=21059
x=69067 y=21023 x=69073 y=21017 x=69109 y=20981
x=69127 y=20963 x=69143 y=20947 x=69151 y=20939
x=69191 y=20899 x=69193 y=20897 x=69203 y=20887
x=69233 y=20857 x=69317 y=20773 x=69337 y=20753
x=69341 y=20749 x=69371 y=20719 x=69383 y=20707
x=69427 y=20663 x=69463 y=20627 x=69491 y=20599
x=69497 y=20593 x=69539 y=20551 x=69557 y=20533

$x=69691$ $y=20399$　$x=69697$ $y=20393$　$x=69737$ $y=20353$
$x=69763$ $y=20327$　$x=69767$ $y=20323$　$x=69821$ $y=20269$
$x=69829$ $y=20261$　$x=69857$ $y=20233$　$x=69859$ $y=20231$
$x=69929$ $y=20161$　$x=69941$ $y=20149$　$x=70001$ $y=20089$
$x=70019$ $y=20071$　$x=70039$ $y=20051$　$x=70061$ $y=20029$
$x=70067$ $y=20023$　$x=70079$ $y=20011$　$x=70099$ $y=19991$
$x=70111$ $y=19979$　$x=70117$ $y=19973$　$x=70141$ $y=19949$
$x=70163$ $y=19927$　$x=70177$ $y=19913$　$x=70199$ $y=19891$
$x=70201$ $y=19889$　$x=70223$ $y=19867$　$x=70229$ $y=19861$
$x=70237$ $y=19853$　$x=70249$ $y=19841$　$x=70271$ $y=19819$
$x=70289$ $y=19801$　$x=70297$ $y=19793$　$x=70313$ $y=19777$
$x=70327$ $y=19763$　$x=70351$ $y=19739$　$x=70373$ $y=19717$
$x=70381$ $y=19709$　$x=70393$ $y=19697$　$x=70429$ $y=19661$
$x=70481$ $y=19609$　$x=70487$ $y=19603$　$x=70507$ $y=19583$
$x=70537$ $y=19553$　$x=70549$ $y=19541$　$x=70583$ $y=19507$
$x=70589$ $y=19501$　$x=70607$ $y=19483$　$x=70619$ $y=19471$
$x=70621$ $y=19469$　$x=70627$ $y=19463$　$x=70657$ $y=19433$
$x=70663$ $y=19427$　$x=70667$ $y=19423$　$x=70687$ $y=19403$
$x=70709$ $y=19381$　$x=70717$ $y=19373$　$x=70823$ $y=19267$
$x=70841$ $y=19249$　$x=70853$ $y=19237$　$x=70877$ $y=19213$
$x=70879$ $y=19211$　$x=70949$ $y=19141$　$x=70951$ $y=19139$
$x=70969$ $y=19121$　$x=71011$ $y=19079$　$x=71039$ $y=19051$
$x=71059$ $y=19031$　$x=71081$ $y=19009$　$x=71089$ $y=19001$
$x=71143$ $y=18947$　$x=71171$ $y=18919$　$x=71191$ $y=18899$
$x=71287$ $y=18803$　$x=71293$ $y=18797$　$x=71317$ $y=18773$
$x=71333$ $y=18757$　$x=71341$ $y=18749$　$x=71347$ $y=18743$
$x=71359$ $y=18731$　$x=71389$ $y=18701$　$x=71399$ $y=18691$
$x=71411$ $y=18679$　$x=71419$ $y=18671$　$x=71429$ $y=18661$
$x=71453$ $y=18637$　$x=71473$ $y=18617$　$x=71503$ $y=18587$
$x=71537$ $y=18553$　$x=71549$ $y=18541$　$x=71551$ $y=18539$

x=71569 y=18521 x=71597 y=18493 x=71633 y=18457
x=71647 y=18443 x=71663 y=18427 x=71693 y=18397
x=71711 y=18379 x=71719 y=18371 x=71761 y=18329
x=71777 y=18313 x=71789 y=18301 x=71821 y=18269
x=71837 y=18253 x=71861 y=18229 x=71867 y=18223
x=71879 y=18211 x=71899 y=18191 x=71909 y=18181
x=71941 y=18149 x=71947 y=18143 x=71963 y=18127
x=71971 y=18119 x=71993 y=18097 x=72031 y=18059
x=72043 y=18047 x=72047 y=18043 x=72077 y=18013
x=72101 y=17989 x=72103 y=17987 x=72109 y=17981
x=72161 y=17929 x=72167 y=17923 x=72169 y=17921
x=72227 y=17863 x=72251 y=17839 x=72253 y=17837
x=72307 y=17783 x=72341 y=17749 x=72353 y=17737
x=72383 y=17707 x=72421 y=17669 x=72431 y=17659
x=72467 y=17623 x=72481 y=17609 x=72493 y=17597
x=72551 y=17539 x=72613 y=17477 x=72623 y=17467
x=72647 y=17443 x=72671 y=17419 x=72673 y=17417
x=72689 y=17401 x=72701 y=17389 x=72707 y=17383
x=72739 y=17351 x=72763 y=17327 x=72797 y=17293
x=72859 y=17231 x=72883 y=17207 x=72901 y=17189
x=72907 y=17183 x=72923 y=17167 x=72931 y=17159
x=72953 y=17137 x=72973 y=17117 x=72997 y=17093
x=73013 y=17077 x=73037 y=17053 x=73043 y=17047
x=73061 y=17029 x=73063 y=17027 x=73079 y=17011
x=73127 y=16963 x=73189 y=16901 x=73259 y=16831
x=73303 y=16787 x=73327 y=16763 x=73331 y=16759
x=73361 y=16729 x=73387 y=16703 x=73417 y=16673
x=73433 y=16657 x=73459 y=16631 x=73471 y=16619
x=73483 y=16607 x=73517 y=16573 x=73523 y=16567
x=73529 y=16561 x=73561 y=16529 x=73571 y=16519

x=73597 y=16493 x=73609 y=16481 x=73613 y=16477
x=73637 y=16453 x=73643 y=16447 x=73673 y=16417
x=73679 y=16411 x=73709 y=16381 x=73721 y=16369
x=73727 y=16363 x=73751 y=16339 x=73757 y=16333
x=73771 y=16319 x=73823 y=16267 x=73859 y=16231
x=73867 y=16223 x=73897 y=16193 x=73907 y=16183
x=73951 y=16139 x=73999 y=16091 x=74017 y=16073
x=74021 y=16069 x=74027 y=16063 x=74099 y=15991
x=74131 y=15959 x=74167 y=15923 x=74177 y=15913
x=74189 y=15901 x=74201 y=15889 x=74203 y=15887
x=74209 y=15881 x=74231 y=15859 x=74287 y=15803
x=74293 y=15797 x=74317 y=15773 x=74323 y=15767
x=74353 y=15737 x=74357 y=15733 x=74363 y=15727
x=74411 y=15679 x=74419 y=15671 x=74441 y=15649
x=74449 y=15641 x=74471 y=15619 x=74489 y=15601
x=74507 y=15583 x=74509 y=15581 x=74521 y=15569
x=74531 y=15559 x=74597 y=15493 x=74623 y=15467
x=74699 y=15391 x=74707 y=15383 x=74713 y=15377
x=74717 y=15373 x=74729 y=15361 x=74731 y=15359
x=74759 y=15331 x=74761 y=15329 x=74771 y=15319
x=74821 y=15269 x=74827 y=15263 x=74831 y=15259
x=74857 y=15233 x=74873 y=15217 x=74891 y=15199
x=74897 y=15193 x=74903 y=15187 x=74929 y=15161
x=74941 y=15149 x=74959 y=15131 x=75013 y=15077
x=75017 y=15073 x=75029 y=15061 x=75037 y=15053
x=75133 y=14957 x=75161 y=14929 x=75167 y=14923
x=75193 y=14897 x=75211 y=14879 x=75223 y=14867
x=75239 y=14851 x=75269 y=14821 x=75277 y=14813
x=75307 y=14783 x=75323 y=14767 x=75337 y=14753
x=75353 y=14737 x=75367 y=14723 x=75377 y=14713

x=75391 y=14699 x=75407 y=14683 x=75437 y=14653
x=75527 y=14563 x=75533 y=14557 x=75539 y=14551
x=75541 y=14549 x=75553 y=14537 x=75557 y=14533
x=75571 y=14519 x=75611 y=14479 x=75629 y=14461
x=75641 y=14449 x=75653 y=14437 x=75659 y=14431
x=75679 y=14411 x=75683 y=14407 x=75689 y=14401
x=75703 y=14387 x=75721 y=14369 x=75743 y=14347
x=75767 y=14323 x=75787 y=14303 x=75797 y=14293
x=75869 y=14221 x=75883 y=14207 x=75913 y=14177
x=75931 y=14159 x=75937 y=14153 x=75941 y=14149
x=75983 y=14107 x=76003 y=14087 x=76039 y=14051
x=76079 y=14011 x=76081 y=14009 x=76091 y=13999
x=76123 y=13967 x=76157 y=13933 x=76159 y=13931
x=76207 y=13883 x=76213 y=13877 x=76231 y=13859
x=76249 y=13841 x=76259 y=13831 x=76261 y=13829
x=76283 y=13807 x=76333 y=13757 x=76367 y=13723
x=76369 y=13721 x=76379 y=13711 x=76403 y=13687
x=76421 y=13669 x=76441 y=13649 x=76463 y=13627
x=76471 y=13619 x=76493 y=13597 x=76537 y=13553
x=76603 y=13487 x=76649 y=13441 x=76673 y=13417
x=76679 y=13411 x=76753 y=13337 x=76777 y=13313
x=76781 y=13309 x=76831 y=13259 x=76871 y=13219
x=76873 y=13217 x=76907 y=13183 x=76913 y=13177
x=76919 y=13171 x=76943 y=13147 x=76963 y=13127
x=76991 y=13099 x=77041 y=13049 x=77047 y=13043
x=77081 y=13009 x=77137 y=12953 x=77167 y=12923
x=77171 y=12919 x=77191 y=12899 x=77201 y=12889
x=77237 y=12853 x=77249 y=12841 x=77261 y=12829
x=77267 y=12823 x=77269 y=12821 x=77291 y=12799
x=77347 y=12743 x=77351 y=12739 x=77369 y=12721

$x=77377$ $y=12713$　$x=77419$ $y=12671$　$x=77431$ $y=12659$
$x=77471$ $y=12619$　$x=77477$ $y=12613$　$x=77479$ $y=12611$
$x=77489$ $y=12601$　$x=77513$ $y=12577$　$x=77521$ $y=12569$
$x=77543$ $y=12547$　$x=77549$ $y=12541$　$x=77551$ $y=12539$
$x=77563$ $y=12527$　$x=77573$ $y=12517$　$x=77587$ $y=12503$
$x=77611$ $y=12479$　$x=77617$ $y=12473$　$x=77681$ $y=12409$
$x=77689$ $y=12401$　$x=77699$ $y=12391$　$x=77711$ $y=12379$
$x=77713$ $y=12377$　$x=77743$ $y=12347$　$x=77747$ $y=12343$
$x=77761$ $y=12329$　$x=77801$ $y=12289$　$x=77813$ $y=12277$
$x=77839$ $y=12251$　$x=77849$ $y=12241$　$x=77863$ $y=12227$
$x=77893$ $y=12197$　$x=77929$ $y=12161$　$x=77933$ $y=12157$
$x=77977$ $y=12113$　$x=77983$ $y=12107$　$x=78017$ $y=12073$
$x=78041$ $y=12049$　$x=78049$ $y=12041$　$x=78079$ $y=12011$
$x=78121$ $y=11969$　$x=78137$ $y=11953$　$x=78157$ $y=11933$
$x=78163$ $y=11927$　$x=78167$ $y=11923$　$x=78193$ $y=11897$
$x=78203$ $y=11887$　$x=78259$ $y=11831$　$x=78277$ $y=11813$
$x=78283$ $y=11807$　$x=78301$ $y=11789$　$x=78307$ $y=11783$
$x=78311$ $y=11779$　$x=78347$ $y=11743$　$x=78401$ $y=11689$
$x=78497$ $y=11593$　$x=78511$ $y=11579$　$x=78539$ $y=11551$
$x=78541$ $y=11549$　$x=78571$ $y=11519$　$x=78593$ $y=11497$
$x=78607$ $y=11483$　$x=78623$ $y=11467$　$x=78643$ $y=11447$
$x=78653$ $y=11437$　$x=78691$ $y=11399$　$x=78697$ $y=11393$
$x=78707$ $y=11383$　$x=78721$ $y=11369$　$x=78737$ $y=11353$
$x=78779$ $y=11311$　$x=78791$ $y=11299$　$x=78803$ $y=11287$
$x=78839$ $y=11251$　$x=78877$ $y=11213$　$x=78893$ $y=11197$
$x=78919$ $y=11171$　$x=78929$ $y=11161$　$x=78941$ $y=11149$
$x=78977$ $y=11113$　$x=79031$ $y=11059$　$x=79043$ $y=11047$
$x=79063$ $y=11027$　$x=79087$ $y=11003$　$x=79103$ $y=10987$
$x=79111$ $y=10979$　$x=79133$ $y=10957$　$x=79151$ $y=10939$
$x=79153$ $y=10937$　$x=79181$ $y=10909$　$x=79187$ $y=10903$

x=79201 y=10889 x=79229 y=10861 x=79231 y=10859
x=79259 y=10831 x=79301 y=10789 x=79309 y=10781
x=79319 y=10771 x=79337 y=10753 x=79357 y=10733
x=79367 y=10723 x=79379 y=10711 x=79399 y=10691
x=79423 y=10667 x=79427 y=10663 x=79433 y=10657
x=79451 y=10639 x=79493 y=10597 x=79531 y=10559
x=79559 y=10531 x=79561 y=10529 x=79589 y=10501
x=79613 y=10477 x=79627 y=10463 x=79631 y=10459
x=79633 y=10457 x=79657 y=10433 x=79691 y=10399
x=79699 y=10391 x=79757 y=10333 x=79769 y=10321
x=79777 y=10313 x=79801 y=10289 x=79817 y=10273
x=79823 y=10267 x=79843 y=10247 x=79847 y=10243
x=79867 y=10223 x=79939 y=10151 x=79979 y=10111
x=79987 y=10103 x=79997 y=10093 x=79999 y=10091
x=80021 y=10069 x=80051 y=10039 x=80141 y=09949
x=80149 y=09941 x=80167 y=09923 x=80207 y=09883
x=80231 y=09859 x=80233 y=09857 x=80239 y=09851
x=80251 y=09839 x=80273 y=09817 x=80279 y=09811
x=80287 y=09803 x=80309 y=09781 x=80341 y=09749
x=80347 y=09743 x=80369 y=09721 x=80429 y=09661
x=80447 y=09643 x=80471 y=09619 x=80489 y=09601
x=80557 y=09533 x=80599 y=09491 x=80611 y=09479
x=80627 y=09463 x=80629 y=09461 x=80651 y=09439
x=80657 y=09433 x=80669 y=09421 x=80671 y=09419
x=80677 y=09413 x=80687 y=09403 x=80713 y=09377
x=80747 y=09343 x=80749 y=09341 x=80779 y=09311
x=80809 y=09281 x=80833 y=09257 x=80849 y=09241
x=80863 y=09227 x=80909 y=09181 x=80917 y=09173
x=80929 y=09161 x=80933 y=09157 x=80953 y=09137
x=80963 y=09127 x=81023 y=09067 x=81031 y=09059

x=81041 y=09049　x=81047 y=09043　x=81049 y=09041
x=81077 y=09013　x=81083 y=09007　x=81119 y=08971
x=81157 y=08933　x=81197 y=08893　x=81203 y=08887
x=81223 y=08867　x=81283 y=08807　x=81307 y=08783
x=81343 y=08747　x=81349 y=08741　x=81353 y=08737
x=81359 y=08731　x=81371 y=08719　x=81401 y=08689
x=81409 y=08681　x=81421 y=08669　x=81463 y=08627
x=81509 y=08581　x=81517 y=08573　x=81527 y=08563
x=81547 y=08543　x=81551 y=08539　x=81553 y=08537
x=81563 y=08527　x=81569 y=08521　x=81629 y=08461
x=81647 y=08443　x=81667 y=08423　x=81671 y=08419
x=81701 y=08389　x=81703 y=08387　x=81727 y=08363
x=81737 y=08353　x=81761 y=08329　x=81773 y=08317
x=81799 y=08291　x=81817 y=08273　x=81847 y=08243
x=81853 y=08237　x=81869 y=08221　x=81899 y=08191
x=81919 y=08171　x=81929 y=08161　x=81943 y=08147
x=81967 y=08123　x=81973 y=08117　x=82003 y=08087
x=82009 y=08081　x=82021 y=08069　x=82031 y=08059
x=82037 y=08053　x=82051 y=08039　x=82073 y=08017
x=82139 y=07951　x=82141 y=07949　x=82153 y=07937
x=82163 y=07927　x=82171 y=07919　x=82183 y=07907
x=82189 y=07901　x=82207 y=07883　x=82217 y=07873
x=82223 y=07867　x=82237 y=07853　x=82261 y=07829
x=82267 y=07823　x=82301 y=07789　x=82349 y=07741
x=82373 y=07717　x=82387 y=07703　x=82421 y=07669
x=82469 y=07621　x=82483 y=07607　x=82487 y=07603
x=82499 y=07591　x=82507 y=07583　x=82529 y=07561
x=82531 y=07559　x=82549 y=07541　x=82561 y=07529
x=82567 y=07523　x=82591 y=07499　x=82601 y=07489
x=82609 y=07481　x=82613 y=07477　x=82633 y=07457

x=82657 y=07433 x=82721 y=07369 x=82757 y=07333
x=82759 y=07331 x=82781 y=07309 x=82793 y=07297
x=82837 y=07253 x=82847 y=07243 x=82883 y=07207
x=82903 y=07187 x=82913 y=07177 x=82939 y=07151
x=82963 y=07127 x=82981 y=07109 x=83047 y=07043
x=83063 y=07027 x=83071 y=07019 x=83077 y=07013
x=83089 y=07001 x=83093 y=06997 x=83207 y=06883
x=83219 y=06871 x=83221 y=06869 x=83227 y=06863
x=83233 y=06857 x=83257 y=06833 x=83267 y=06823
x=83299 y=06791 x=83311 y=06779 x=83357 y=06733
x=83389 y=06701 x=83399 y=06691 x=83401 y=06689
x=83417 y=06673 x=83431 y=06659 x=83437 y=06653
x=83471 y=06619 x=83537 y=06553 x=83561 y=06529
x=83609 y=06481 x=83617 y=06473 x=83621 y=06469
x=83639 y=06451 x=83641 y=06449 x=83663 y=06427
x=83701 y=06389 x=83717 y=06373 x=83737 y=06353
x=83761 y=06329 x=83773 y=06317 x=83791 y=06299
x=83813 y=06277 x=83833 y=06257 x=83843 y=06247
x=83869 y=06221 x=83873 y=06217 x=83891 y=06199
x=83939 y=06151 x=83969 y=06121 x=84011 y=06079
x=84017 y=06073 x=84047 y=06043 x=84053 y=06037
x=84061 y=06029 x=84137 y=05953 x=84163 y=05927
x=84211 y=05879 x=84221 y=05869 x=84223 y=05867
x=84229 y=05861 x=84239 y=05851 x=84247 y=05843
x=84263 y=05827 x=84299 y=05791 x=84307 y=05783
x=84347 y=05743 x=84349 y=05741 x=84389 y=05701
x=84401 y=05689 x=84407 y=05683 x=84421 y=05669
x=84431 y=05659 x=84437 y=05653 x=84443 y=05647
x=84449 y=05641 x=84467 y=05623 x=84499 y=05591
x=84509 y=05581 x=84521 y=05569 x=84533 y=05557

x=84559 y=05531　x=84589 y=05501　x=84649 y=05441
x=84653 y=05437　x=84659 y=05431　x=84673 y=05417
x=84691 y=05399　x=84697 y=05393　x=84787 y=05303
x=84793 y=05297　x=84809 y=05281　x=84811 y=05279
x=84857 y=05233　x=84859 y=05231　x=84919 y=05171
x=84977 y=05113　x=84991 y=05099　x=85009 y=05081
x=85081 y=05009　x=85087 y=05003　x=85091 y=04999
x=85103 y=04987　x=85121 y=04969　x=85133 y=04957
x=85147 y=04943　x=85159 y=04931　x=85201 y=04889
x=85213 y=04877　x=85229 y=04861　x=85259 y=04831
x=85297 y=04793　x=85303 y=04787　x=85331 y=04759
x=85361 y=04729　x=85369 y=04721　x=85411 y=04679
x=85427 y=04663　x=85439 y=04651　x=85447 y=04643
x=85451 y=04639　x=85453 y=04637　x=85469 y=04621
x=85487 y=04603　x=85523 y=04567　x=85571 y=04519
x=85577 y=04513　x=85597 y=04493　x=85607 y=04483
x=85627 y=04463　x=85639 y=04451　x=85643 y=04447
x=85667 y=04423　x=85669 y=04421　x=85717 y=04373
x=85733 y=04357　x=85751 y=04339　x=85793 y=04297
x=85817 y=04273　x=85819 y=04271　x=85829 y=04261
x=85831 y=04259　x=85837 y=04253　x=85847 y=04243
x=85889 y=04201　x=85931 y=04159　x=85933 y=04157
x=85991 y=04099　x=85999 y=04091　x=86011 y=04079
x=86017 y=04073　x=86069 y=04021　x=86077 y=04013
x=86083 y=04007　x=86143 y=03947　x=86161 y=03929
x=86171 y=03919　x=86179 y=03911　x=86183 y=03907
x=86201 y=03889　x=86209 y=03881　x=86239 y=03851
x=86243 y=03847　x=86257 y=03833　x=86269 y=03821
x=86287 y=03803　x=86293 y=03797　x=86297 y=03793
x=86311 y=03779　x=86323 y=03767　x=86351 y=03739

x=86357 y=03733 x=86371 y=03719 x=86381 y=03709
x=86389 y=03701 x=86399 y=03691 x=86413 y=03677
x=86453 y=03637 x=86467 y=03623 x=86477 y=03613
x=86509 y=03581 x=86531 y=03559 x=86533 y=03557
x=86561 y=03529 x=86573 y=03517 x=86579 y=03511
x=86599 y=03491 x=86627 y=03463 x=86629 y=03461
x=86677 y=03413 x=86719 y=03371 x=86729 y=03361
x=86743 y=03347 x=86767 y=03323 x=86771 y=03319
x=86783 y=03307 x=86837 y=03253 x=86861 y=03229
x=86869 y=03221 x=86923 y=03167 x=86927 y=03163
x=86969 y=03121 x=86981 y=03109 x=87011 y=03079
x=87041 y=03049 x=87049 y=03041 x=87071 y=03019
x=87119 y=02971 x=87121 y=02969 x=87133 y=02957
x=87151 y=02939 x=87181 y=02909 x=87187 y=02903
x=87211 y=02879 x=87253 y=02837 x=87257 y=02833
x=87293 y=02797 x=87299 y=02791 x=87313 y=02777
x=87323 y=02767 x=87337 y=02753 x=87359 y=02731
x=87383 y=02707 x=87403 y=02687 x=87407 y=02683
x=87427 y=02663 x=87433 y=02657 x=87443 y=02647
x=87473 y=02617 x=87481 y=02609 x=87511 y=02579
x=87539 y=02551 x=87541 y=02549 x=87547 y=02543
x=87559 y=02531 x=87587 y=02503 x=87613 y=02477
x=87623 y=02467 x=87631 y=02459 x=87643 y=02447
x=87649 y=02441 x=87679 y=02411 x=87691 y=02399
x=87697 y=02393 x=87701 y=02389 x=87719 y=02371
x=87739 y=02351 x=87743 y=02347 x=87751 y=02339
x=87793 y=02297 x=87797 y=02293 x=87803 y=02287
x=87853 y=02237 x=87869 y=02221 x=87877 y=02213
x=87887 y=02203 x=87911 y=02179 x=87959 y=02131
x=87961 y=02129 x=87977 y=02113 x=87991 y=02099

x=88001 y=02089　x=88003 y=02087　x=88007 y=02083
x=88037 y=02053　x=88079 y=02011　x=88093 y=01997
x=88117 y=01973　x=88177 y=01913　x=88211 y=01879
x=88223 y=01867　x=88259 y=01831　x=88289 y=01801
x=88301 y=01789　x=88337 y=01753　x=88397 y=01693
x=88423 y=01667　x=88427 y=01663　x=88463 y=01627
x=88469 y=01621　x=88471 y=01619　x=88493 y=01597
x=88523 y=01567　x=88547 y=01543　x=88591 y=01499
x=88607 y=01483　x=88609 y=01481　x=88643 y=01447
x=88651 y=01439　x=88657 y=01433　x=88661 y=01429
x=88663 y=01427　x=88667 y=01423　x=88681 y=01409
x=88729 y=01361　x=88771 y=01319　x=88789 y=01301
x=88793 y=01297　x=88799 y=01291　x=88801 y=01289
x=88807 y=01283　x=88811 y=01279　x=88813 y=01277
x=88853 y=01237　x=88861 y=01229　x=88867 y=01223
x=88873 y=01217　x=88897 y=01193　x=88903 y=01187
x=88919 y=01171　x=88937 y=01153　x=88993 y=01097
x=88997 y=01093　x=89003 y=01087　x=89021 y=01069
x=89041 y=01049　x=89051 y=01039　x=89057 y=01033
x=89069 y=01021　x=89071 y=01019　x=89107 y=00983
x=89113 y=00977　x=89119 y=00971　x=89123 y=00967
x=89137 y=00953　x=89153 y=00937　x=89203 y=00887
x=89209 y=00881　x=89213 y=00877　x=89227 y=00863
x=89231 y=00859　x=89237 y=00853　x=89261 y=00829
x=89269 y=00821　x=89293 y=00797　x=89303 y=00787
x=89317 y=00773　x=89329 y=00761　x=89363 y=00727
x=89371 y=00719　x=89381 y=00709　x=89399 y=00691
x=89413 y=00677　x=89417 y=00673　x=89431 y=00659
x=89443 y=00647　x=89449 y=00641　x=89459 y=00631
x=89477 y=00613　x=89491 y=00599　x=89513 y=00577

x=89519 y=00571　x=89521 y=00569　x=89527 y=00563
x=89533 y=00557　x=89567 y=00523　x=89591 y=00499
x=89599 y=00491　x=89603 y=00487　x=89611 y=00479
x=89627 y=00463　x=89633 y=00457　x=89657 y=00433
x=89659 y=00431　x=89669 y=00421　x=89671 y=00419
x=89681 y=00409　x=89689 y=00401　x=89753 y=00337
x=89759 y=00331　x=89779 y=00311　x=89783 y=00307

从集合 PB 中求得的解的个数为：32
通过 PB 集合求得的素数对：
x=00017 y=90073　x=00019 y=90071　x=00023 y=90067
x=00031 y=90059　x=00037 y=90053　x=00059 y=90031
x=00067 y=90023　x=00071 y=90019　x=00073 y=90017
x=00079 y=90011　x=00083 y=90007　x=00089 y=90001
x=00101 y=89989　x=00107 y=89983　x=00113 y=89977
x=00127 y=89963　x=00131 y=89959　x=00151 y=89939
x=00167 y=89923　x=00173 y=89917　x=00181 y=89909
x=00191 y=89899　x=00193 y=89897　x=00199 y=89891
x=00223 y=89867　x=00241 y=89849　x=00251 y=89839
x=00257 y=89833　x=00269 y=89821　x=00271 y=89819
x=00281 y=89809　x=00293 y=89797

偶数 90090 的满足哥德巴赫猜想的全解的个数共计：2135 对

第三章　偶数表为二素数之差

这个问题是与哥德巴赫猜想相对应的另一种偶数表示形式，其中隐含了广义孪生素数猜想（差值为任一偶数的素数对皆有无穷多组）的内容，至今尚未得到证明。下文将对这一问题进行讨论。

3.1　求解证明

设，A 为大于 80 000 的任意大偶数，将不超过 nA 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏（Eratosthenes）筛法求得不超过 $(nA)^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\ldots<p_r\leqslant(nA)^{1/2} \tag{1}$$

$n\geqslant 2$　　　n 为自选的正整数

将不超过 nA 且大于 $A+p_r$ 的全部正整数集合用 N 表示，$N=(A+p_r+1,A+p_r+2,\ldots nA)$，则集合 N 的基数为

$$|N|=nA-(A+p_r)=(n-1)A-p_r \tag{2}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$A\equiv A_i\ (\mathrm{mod}\ p_i),\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{3}$$

A_i 为非负的最小剩余

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p_i),\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{4}$$

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{5}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（4），（5）式筛选条件的所有元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

3.1.1 求证筛函数的下界

已知，被筛集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数。根据第一章中给出的相关公式（61）式可知，$|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{6}$$

根据第一章的（72）式可知，$|N_B|$ 的下界计算式为

$$|N_B| > |N|\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{p_i}{|N|}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{7}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数，下面具体分析确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时，筛选条件（4），（5）式即为

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_1} \tag{8}$$

$$g \not\equiv A_1 \pmod{p_1} \tag{9}$$

$p_1=2$，A 为偶数，必然 $A_1=0$，故知（9）式等同于（8）式，二者变为一个筛选条件。由（8）式可知，集合 N 中按模 p_1 只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件，由此得

$$\alpha_1 = 1 \tag{10}$$

当 $i>1$ 时，可分两种情况：

其一，$i>1$，且 $A_i=0$。将 $A_i=0$ 代入筛选条件（5）式，可见（4）式和（5）式完全等同，即二者合为（4）式一个条件。由（4）式可知，集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的“0 同余类子集”不符合筛选条件。其余 p_i-1 个模 p_i 的同余类子集都能符合筛选条件，故得

$$\alpha_i=p_i-1 \qquad (i>1, A_i=0) \tag{11}$$

其二，$i>1$，且 $A_i\neq 0$。此时，（4）式和（5）式对应于两个不同的同余类子集。根据（4）、（5）式可知，集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的“0 同余类子集”和“A_i 同余类子集”不符合筛选条件，其余 p_i-2 个模 p_i 的同余类子集都能符合筛选条件。故得

$$\alpha_i=p_i-2 \qquad (i>1, A_i\neq 0) \tag{12}$$

将（11）式和（12）式，合并为下面一个统一的表示式：

$$\alpha_i=p_i-2^{\delta_i} \qquad (i>1) \tag{13}$$

$$\delta_i=0，(A_i=0)；\ \delta_i=1，(A_i\neq 0)$$

将（10）和（13）式代入（6）式，得近似估算公式：

$$|N_B|=\frac{|N|}{2}\prod_{i=2}^{r}\left(\frac{p_i-2^{\delta_i}}{p_i}\right) \tag{14}$$

$$\delta_i=0，(A_i=0)；\ \delta_i=1，(A_i\neq 0)$$

将（10）和（13）式代入（7）式，得下界计算公式：

$$|N_B|>F_1\left(\frac{|N|}{2}\right)\prod_{i=2}^{r}\left(\frac{p_i-2^{\delta_i}}{p_i}\right) \tag{15}$$

$$\delta_i=0，(A_i=0)；\ \delta_i=1，(A_i\neq 0)$$

$$F_1=\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{p_i}{|N|}\right)>1-\left(\frac{1}{|N|}\right)\sum_{i=1}^{r}p_i \tag{16}$$

由于$F_1>0$，根据第一章（64）式可将（15）式改写为

$$|N_B|>F_1(\frac{|N|}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{17}$$

由第一章（77）式可以推得

$$\Pi(x)-\Pi(\frac{x}{2})<\Pi(\frac{x}{2}) \tag{18}$$

（18）式表明，数值越大的区域素数分布的密度越小。由此可得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i<(\frac{1}{2})(p_1+p_r)\Pi(p_r) \tag{19}$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r)<6\ln 2(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{20}$$

（20）式代入（19）式得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i<\frac{3\ln 2(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{21}$$

（21）代入（16）式得

$$F_1>1-\frac{3\ln 2(p_1+p_r)p_r}{|N|\ln p_r} \tag{22}$$

将（22）式代入（17）式可得

$$|N_B|>\{\frac{|N|}{2}-\frac{3\ln 2(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{23}$$

将$|N|/2$作以下变换：

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_4/(p_5-2)\}+|N|/(p_5-2) \tag{24}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_5/(p_6-2)\} \tag{25}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_6/(p_7-2)\}+|N|/(p_7-2) \tag{26}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_7/(p_8-2)\} \tag{27}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_8/(p_9-2)\}+|N|/(p_9-2) \tag{28}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_9/(p_{10}-2)\}+2|N|/(p_{10}-2) \tag{29}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{10}/(p_{11}-2)\} \tag{30}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{11}/(p_{12}-2)\}+2|N|/(p_{12}-2) \tag{31}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{12}/(p_{13}-2)\}+|N|/(p_{13}-2) \tag{32}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{13}/(p_{14}-2)\} \tag{33}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{14}/(p_{15}-2)\}+|N|/(p_{15}-2) \tag{34}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{15}/(p_{16}-2)\}+2|N|/(p_{16}-2) \tag{35}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{16}/(p_{17}-2)\}+2|N|/(p_{17}-2) \tag{36}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{17}/(p_{18}-2)\} \tag{37}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{18}/(p_{19}-2)\}+2|N|/(p_{19}-2) \tag{38}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{19}/(p_{20}-2)\}+|N|/(p_{20}-2) \tag{39}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{20}/(p_{21}-2)\} \tag{40}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{21}/(p_{22}-2)\}+2|N|/(p_{22}-2) \tag{41}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{22}/(p_{23}-2)\}+|N|/(p_{23}-2) \tag{42}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{23}/(p_{24}-2)\}+2|N|/(p_{24}-2) \tag{43}$$

$$|N|/2=(|N|/2)\{p_{24}/(p_{25}-2)\}+3|N|/(p_{25}-2) \tag{44}$$

将（24），（25）……（44）式逐次代入右端第一项，可得

$$\frac{|N|}{2}=\frac{|N|}{2}\prod_{i=5}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+F_2 \tag{45}$$

$$F_2=(\frac{|N|}{p_5-2})\prod_{i=6}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{|N|}{p_7-2})\prod_{i=8}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{|N|}{p_9-2})\prod_{i=10}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2|N|}{p_{10}-2})\prod_{i=11}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2|N|}{p_{12}-2})\prod_{i=13}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{|N|}{p_{13}-2})\prod_{i=14}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{|N|}{p_{15}-2})\prod_{i=16}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2|N|}{p_{16}-2})\prod_{i=17}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2|N|}{p_{17}-2})\prod_{i=18}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2|N|}{p_{19}-2})\prod_{i=20}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{|N|}{p_{20}-2})\prod_{i=21}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2|N|}{p_{22}-2})\prod_{i=23}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{|N|}{p_{23}-2})\prod_{i=24}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2|N|}{p_{24}-2})(\frac{p_{24}}{p_{25}-2})+$$

$$\frac{3|N|}{p_{25}-2} \qquad (46)$$

将 $P_5=11$， $P_6=13$， $P_7=17$， $P_8=19$， $P_9=23$， $P_{10}=29$， $P_{11}=31$， $P_{12}=37$， $P_{13}=41$， $P_{14}=43$， $P_{15}=47$， $P_{16}=53$， $P_{17}=59$， $P_{18}=61$， $P_{19}=67$， $P_{20}=71$， $P_{21}=73$， $P_{22}=79$， $P_{23}=83$， $P_{24}=89$， $P_{25}=97$ 代入（46）式求得：

$$F_2=0.3654|N| \qquad (47)$$

将（47）式代入（45）式得

$$\frac{|N|}{2}=\frac{|N|}{2}\prod_{i=5}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+0.3654|N| \qquad (48)$$

将（48）式代入（23）式可得

$$|N_B| > \frac{|N|}{2}\prod_{j=5}^{25}\left(\frac{p_{j-1}}{p_j-2}\right)\prod_{i=2}^{r}\left(\frac{p_i-2}{p_i}\right)+F_3 \tag{49}$$

$$F_3 = \{0.3654|N| - \frac{3\ln 2(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{r}\left(\frac{p_i-2}{p_i}\right) \tag{50}$$

由（1）式和（2）式可得

$$|N| \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)p_r^{\ 2} - p_r \tag{51}$$

将（51）式代入（50）式得

$$F_3 = F_4 p_r \prod_{i=2}^{r}\left(\frac{p_i-2}{p_i}\right) \tag{52}$$

$$F_4 = 0.3654\left(\frac{n-1}{n}\right)p_r - 0.3654 - \frac{3\ln 2(p_1+p_r)}{2\ln p_r} \tag{53}$$

$$\frac{dF_4}{dp_r} = 0.3654\left(\frac{n-1}{n}\right) - 1.04\left(\frac{\ln p_r - (p_1+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\right) =$$

$$0.3654\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1.04}{\ln p_r} + \frac{1.04(p_1+p_r)}{p_r \ln^2 p_r} >$$

$$0.3654\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1.04}{\ln p_r} \tag{54}$$

令　$0.3654\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1.04}{\ln p_r} > 0$

得　$p_r > \mathrm{e}^{2.846n/(n-1)}$ （55）

将条件（55）式代入（54）式，可得

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}p_r} > 0, \qquad p_r > \mathrm{e}^{2.846n/(n-1)} \tag{56}$$

一般要求$n \geqslant 2$，故得

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}p_r} > 0\,, \qquad p_r > 296 \tag{57}$$

（57）式表示，当 $p_r > 296$ 时，F_4 为 p_r 的递增函数。

当　$A \geqslant 80\,000$ 时，$p_r \geqslant 397 > 296$

而且 $F_4 \quad (p_r = 397, n = 2) = 2.82$，故知：

$$F_4 > 2.8\,, \qquad A > 80\,000 \tag{58}$$

将（58）式代入（52）式可得

$$F_3 > 2.8 p_r \prod_{i=2}^{r} (\frac{p_i - 2}{p_i}) = \frac{2.8 p_r}{3} \prod_{i=3}^{r} (\frac{p_i - 2}{p_i}) \tag{59}$$

由于，$p_i - 2 \geq p_{i-1} \qquad i \geq 3$ （60）

$$F_3 > \frac{2.8 p_r}{3} \prod_{i=3}^{r} (\frac{p_{i-1}}{p_i}) = 2.8 \tag{61}$$

将（61）式代入（49）式得

$$|N_B| > \frac{|N|}{2} (\frac{1}{3}) \prod_{i=3}^{r} (\frac{p_{i-1}}{p_i}) + 2.8 = \frac{|N|}{2 p_r} + 2.8 \tag{62}$$

将（51）式代入（62）式得

$$|N_B| > (\frac{n-1}{2n}) p_r - \frac{1}{2} + 2.8 > (\frac{n-1}{2n}) p_r \tag{63}$$

3.1.2　通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一个元素 x，再引入参量：

$$y = x - A \tag{64}$$

根据定义可知：

$$x \in E\,, \qquad x > 1 \tag{65}$$

$$y \in E\,, \qquad y > 1 \tag{66}$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组：

$x \equiv x_i \pmod{p_i}$， $i = 1,2,\ldots,r$

$y \equiv y_i \pmod{p_i}$， $i = 1,2,\ldots,r$

已知$x \in N_B$，根据筛选条件（4）式可知：

$$x_i \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{67}$$

根据（5）式可知，

$$x_i \neq A_i, \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{68}$$

依据同余式的性质，由（64）式可推得：

$$y_i \equiv x_i - A_i \pmod{p_i}, \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{69}$$

由（68）和（69）式可知：

$$y_i \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{70}$$

根据第一章引理 3：由（65）和（67）式可知x为奇素数

根据第一章引理 3：由（66）和（70）式可知y为奇素数

将（64）式移项可得

$$A = x - y \tag{71}$$

（71）式即是我们所要求证的关系式。

x为集合N_B中任一元素，故集合N_B中每个元素都对应（71）式的一个解。考虑到推证过程中（58）式的限定条件可知：

大于 80 000 的任意大偶数都可表示为二个奇素数之差，而且解的个数不少于$(n-1)p_r/2n$个（p_r为不超过$(nA)^{1/2}$的最大素数）。

3.2 解的无限性

已知，集合N_B中每个元素都对应（71）式的一个解，而集合N_B中元素个数的下界由（63）式可知：

$$|N_B| > (\frac{n-1}{2n})p_r, \quad n \geqslant 2 \tag{72}$$

根据定义，p_r 为不超过 $(nA)^{1/2}$ 的最大素数。对于任意给定的偶数 A，显然，所选取的 n 值越大则 p_r 越大。由此可见，(72)式右端的函数值，必然随着自选参量 n 值的增大而增大，当 n 趋于无穷时，(72)式右端的函数值必定趋于无穷。故，满足(71)式的解的个数可以有无穷多个。

3.3 小偶数的求证方法

实际上小于 80 000 的任意偶数同样可以表示为两个奇素数之差，而且满足此条件的奇素数有无穷多对。其证明方法提示如下：

设 $2m$ 表示小于 80 000 的任意偶数。

A 为大于某选定数的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

再以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\dots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\dots<p_r\le A^{1/2}$$

用筛选方法从集合 E 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g\ne 0 \pmod{p_i}\,,\qquad i=1,2,\dots,r$$

$$g\ne 2m \pmod{p_i}\,,\qquad i=1,2,\dots,r$$

g 表示集合 E 中被选元素

从集合 E 中将同时符合上述筛选条件的元素分选出来，组成子集 E_B。再来讨论子集 E_B 的基数$|E_B|$。

不难证明，子集 E_B 中不为 1 的元素的个数为

$$|E_B|-1>\frac{p_r}{2}$$

从集合 E_B 中任取一个数值不为 1 的元素 x。

令
$$y = x - 2m$$

可以证明 x 和 y 都是奇素数。将上式移项可得

$$x - y = 2m$$

此式即是所要求证的关系式。

由于 x 和 y 都大于 $A^{1/2}$。故通过集合 E_B 求得的素数对全在区间（$A^{1/2},A$）之内。当选择求证区间按（$A^{1/2},A$），（A,A^2），（A^2,A^4）……规律划分时，每个区间所求的素数对都不重合。这样的区间有无穷多个，自然差值为 $2m$ 的素数对必定有无穷多对。

有兴趣的读者可对全过程自行求证。

3.4　求解程序

下面是用 ASP 写的求解运算程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>任意大偶数可表为两个奇素数之差</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
var a=form1.a.value;
if(a==""||a==null){
    alert("请输入偶数 A（10 以上）！ ");
    return;
```

```
    }else if(parseInt(a)%2!=0||parseInt(a)<10){
        alert("输入的偶数 A 必须是 10 以上的偶数！");
        return;
    }
    var n=form1.n.value;
    if(n==""||n==null){
        alert("请输入自选常数 n（2 以上）！");
        return;
    }else if(parseInt(n)<2){
        alert("输入的自选常数 n 必须是 2 以上的整数！");
        return;
    }
    form1.submit();
    }
    </script>

    </head>

    <body bgcolor="#BFC0B6">
    <p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
任意大偶数可表为两个奇素数之差求解程序</strong></font>
</p>
    <p align="center"> </p>
    <p align="center"> </p>
    <p align="center">如果您输入的偶数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
    <form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
      <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
        <tr>
```

```
<td width="201" align="right">请输入偶数A(10以上):</td>
<td width="279"><input name="a" type="text" id="a"> </td>
</tr>
<tr>
<td width="201" align="right">请输入自选常数n（2以上）：</td>
<td width="279"><input name="n" type="text" id="n"></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" colspan="2"><input type="button" name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
   
<input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
</tr>
</table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
n=clng(request.form("n"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=gb2312">
```

```
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>任意大偶数可表为两个奇素数之差</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“……是否取消该脚本？”，请
点击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>任意大偶数可表为两个奇素数
之差求解运算结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
var array_ai = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
//num1=0;
//num2=0;
//num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
n=parseInt("<%=n%>");
if (a<10 || a%2!=0 || n<2)
{
document.write("输入错误！");
}else{
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的偶数 a 为:
```

```
</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"    
<font color=#FF0000 size='4'>自选常数 n ="+n+"</font></font><br>");

    pr=Math.sqrt(a*n);
    pr=parseInt(pr);
    //i=0
    //var i1=1;
    //var i2=1;
    ther=0;
    i=0
    //alert(pr);
    for(pi=2;pi<=pr;pi++)
    {//alert(array_pi[i]);
    flag=1;
    for(j=2;j<=(pi/2);j++)
    {
        if(pi%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if(flag==1)
    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
        //array_pi2[i]=pi;
        array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //alert(array_pi[i]);
```

```
        i++;
    }
    }

    ther=i;

    var silinN=n*a;
    for(j=0,i=a+array_pi[ther-1]+1;i<=silinN;i++,j++){
    array_n[j]=i;
    //alert(array_n[i]);
    }
    for(i=0;i<array_n.length;i++)
    {
    for(k=0;k<array_pi.length;k++)
    {

        if((array_n[i]%array_pi[k]==0)||(array_n[i]%array_pi[k]=
=array_ai[k]))
            {
                array_n[i]=0;
                break;
            }

    }
    }
    x=0;
    for(i=0;i<array_n.length;i++){
    if(array_n[i]>0)
    x++;
    //alert(array_n[i]);
    }
```

```
document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的解的个数为：</font>" + x + "<br>");
    if(x>0){
    document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N 中求
得的解：</font><br>");
    var astr=new String(a);
    var thelength=astr.length;
    var x11,y11;
    m=1;
    for(i=0;i<array_n.length;i++)
    {
        switch(array_n[i])
        {
            case 0: break;
            default:
                x1=array_n[i];
                y1=array_n[i]-a;
                x11=new String(x1);
                for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
                    x11="0"+""+x11;
                }
                y11=new String(y1);
                for(var iii=y11.length;iii<thelength;iii++){
                    y11="0"+""+y11;
                }
                document.write("<font
size='4'>x</font>="+x11+"   <font   size='4'>y</font>="+y11+" ;
    ");
                if(m%3==0)
                {
```

```
                document.write("<br>");

            }
             m=m+1;
     }

  }
 }


 document.all("wait_div").style.display="none";
 document.all("wait2_div").style.display="";
 }
 </script>
 </p></body>
 </html>
```

3.5 实筛数据

输入的偶数 a 为：300 自选常数 n =2

从集合 N 中求得的解的个数为：30

从集合 N 中求得的解：

x=331 y=031　x=337 y=037　x=347 y=047

x=353 y=053　x=359 y=059　x=367 y=067

x=373 y=073　x=379 y=079　x=383 y=083

x=389 y=089　x=397 y=097　x=401 y=101

x=409 y=109　x=431 y=131　x=439 y=139

x=449 y=149　x=457 y=157　x=463 y=163

x=467 y=167　x=479 y=179　x=491 y=191

x=499 y=199　x=523 y=223　x=541 y=241

x=557 y=257　x=563 y=263　x=569 y=269

x=571 y=271　x=577 y=277　x=593 y=293

输入的偶数 a 为：300　自选常数 n=10

从集合 N 中求得的解的个数为：183

从集合 N 中求得的解：

x=359 y=059　x=367 y=067　x=373 y=073
x=379 y=079　x=383 y=083　x=389 y=089
x=397 y=097　x=401 y=101　x=409 y=109
x=431 y=131　x=439 y=139　x=449 y=149
x=457 y=157　x=463 y=163　x=467 y=167
x=479 y=179　x=491 y=191　x=499 y=199
x=523 y=223　x=541 y=241　x=557 y=257
x=563 y=263　x=569 y=269　x=571 y=271
x=577 y=277　x=593 y=293　x=607 y=307
x=613 y=313　x=617 y=317　x=631 y=331
x=647 y=347　x=653 y=353　x=659 y=359
x=673 y=373　x=683 y=383　x=701 y=401
x=709 y=409　x=719 y=419　x=733 y=433
x=739 y=439　x=743 y=443　x=757 y=457
x=761 y=461　x=787 y=487　x=809 y=509
x=821 y=521　x=823 y=523　x=857 y=557
x=863 y=563　x=877 y=577　x=887 y=587
x=907 y=607　x=919 y=619　x=941 y=641
x=947 y=647　x=953 y=653　x=977 y=677
x=983 y=683　x=991 y=691　x=1009 y=709
x=1019 y=719　x=1033 y=733　x=1039 y=739
x=1051 y=751　x=1061 y=761　x=1069 y=769
x=1087 y=787　x=1097 y=797　x=1109 y=809
x=1123 y=823　x=1129 y=829　x=1153 y=853

x=1163 y=863 x=1181 y=881 x=1187 y=887
x=1229 y=929 x=1237 y=937 x=1277 y=977
x=1283 y=983 x=1291 y=991 x=1297 y=997
x=1319 y=1019 x=1321 y=1021 x=1361 y=1061
x=1409 y=1109 x=1423 y=1123 x=1429 y=1129
x=1451 y=1151 x=1453 y=1153 x=1471 y=1171
x=1481 y=1181 x=1487 y=1187 x=1493 y=1193
x=1523 y=1223 x=1531 y=1231 x=1549 y=1249
x=1559 y=1259 x=1579 y=1279 x=1583 y=1283
x=1597 y=1297 x=1601 y=1301 x=1607 y=1307
x=1619 y=1319 x=1621 y=1321 x=1627 y=1327
x=1667 y=1367 x=1699 y=1399 x=1709 y=1409
x=1723 y=1423 x=1733 y=1433 x=1747 y=1447
x=1753 y=1453 x=1759 y=1459 x=1783 y=1483
x=1787 y=1487 x=1789 y=1489 x=1811 y=1511
x=1823 y=1523 x=1831 y=1531 x=1867 y=1567
x=1871 y=1571 x=1879 y=1579 x=1901 y=1601
x=1907 y=1607 x=1913 y=1613 x=1993 y=1693
x=1997 y=1697 x=1999 y=1699 x=2053 y=1753
x=2083 y=1783 x=2087 y=1787 x=2089 y=1789
x=2111 y=1811 x=2131 y=1831 x=2161 y=1861
x=2179 y=1879 x=2207 y=1907 x=2213 y=1913
x=2251 y=1951 x=2273 y=1973 x=2287 y=1987
x=2293 y=1993 x=2297 y=1997 x=2311 y=2011
x=2339 y=2039 x=2381 y=2081 x=2383 y=2083
x=2389 y=2089 x=2399 y=2099 x=2411 y=2111
x=2437 y=2137 x=2441 y=2141 x=2503 y=2203
x=2521 y=2221 x=2539 y=2239 x=2543 y=2243
x=2551 y=2251 x=2593 y=2293 x=2609 y=2309
x=2633 y=2333 x=2647 y=2347 x=2657 y=2357
x=2671 y=2371 x=2677 y=2377 x=2683 y=2383

x=2689 y=2389 x=2693 y=2393 x=2699 y=2399
x=2711 y=2411 x=2741 y=2441 x=2767 y=2467
x=2777 y=2477 x=2803 y=2503 x=2843 y=2543
x=2851 y=2551 x=2857 y=2557 x=2879 y=2579
x=2909 y=2609 x=2917 y=2617 x=2957 y=2657
x=2963 y=2663 x=2971 y=2671 x=2999 y=2699

输入的偶数 a 为：5000 自选常数 n =2
从集合 N 中求得的解的个数为：137
从集合 N 中求得的解：
x=5101 y=0101 x=5107 y=0107 x=5113 y=0113
x=5167 y=0167 x=5179 y=0179 x=5197 y=0197
x=5227 y=0227 x=5233 y=0233 x=5281 y=0281
x=5347 y=0347 x=5419 y=0419 x=5431 y=0431
x=5443 y=0443 x=5449 y=0449 x=5479 y=0479
x=5503 y=0503 x=5521 y=0521 x=5557 y=0557
x=5563 y=0563 x=5569 y=0569 x=5641 y=0641
x=5647 y=0647 x=5653 y=0653 x=5659 y=0659
x=5683 y=0683 x=5701 y=0701 x=5743 y=0743
x=5821 y=0821 x=5827 y=0827 x=5839 y=0839
x=5857 y=0857 x=5881 y=0881 x=5953 y=0953
x=6091 y=1091 x=6151 y=1151 x=6163 y=1163
x=6217 y=1217 x=6229 y=1229 x=6277 y=1277
x=6301 y=1301 x=6361 y=1361 x=6367 y=1367
x=6373 y=1373 x=6427 y=1427 x=6451 y=1451
x=6481 y=1481 x=6553 y=1553 x=6571 y=1571
x=6607 y=1607 x=6619 y=1619 x=6637 y=1637
x=6709 y=1709 x=6733 y=1733 x=6823 y=1823
x=6871 y=1871 x=6907 y=1907 x=6949 y=1949
x=6997 y=1997 x=7027 y=2027 x=7039 y=2039

x=7069 y=2069　x=7129 y=2129　x=7207 y=2207
x=7213 y=2213　x=7237 y=2237　x=7243 y=2243
x=7297 y=2297　x=7309 y=2309　x=7333 y=2333
x=7351 y=2351　x=7393 y=2393　x=7411 y=2411
x=7417 y=2417　x=7459 y=2459　x=7477 y=2477
x=7549 y=2549　x=7591 y=2591　x=7621 y=2621
x=7687 y=2687　x=7699 y=2699　x=7741 y=2741
x=7753 y=2753　x=7789 y=2789　x=7879 y=2879
x=7927 y=2927　x=7963 y=2963　x=8011 y=3011
x=8089 y=3089　x=8167 y=3167　x=8191 y=3191
x=8209 y=3209　x=8221 y=3221　x=8329 y=3329
x=8389 y=3389　x=8461 y=3461　x=8467 y=3467
x=8527 y=3527　x=8539 y=3539　x=8581 y=3581
x=8623 y=3623　x=8677 y=3677　x=8719 y=3719
x=8761 y=3761　x=8779 y=3779　x=8803 y=3803
x=8821 y=3821　x=8863 y=3863　x=8923 y=3923
x=8929 y=3929　x=9001 y=4001　x=9007 y=4007
x=9013 y=4013　x=9049 y=4049　x=9091 y=4091
x=9127 y=4127　x=9133 y=4133　x=9157 y=4157
x=9241 y=4241　x=9283 y=4283　x=9337 y=4337
x=9349 y=4349　x=9391 y=4391　x=9397 y=4397
x=9421 y=4421　x=9463 y=4463　x=9547 y=4547
x=9643 y=4643　x=9649 y=4649　x=9679 y=4679
x=9721 y=4721　x=9733 y=4733　x=9787 y=4787
x=9817 y=4817　x=9871 y=4871　x=9931 y=4931
x=9967 y=4967　x=9973 y=4973

输入的偶数 a 为：5000　自选常数 n =3

从集合 N 中求得的解的个数为：238

从集合 N 中求得的解：

x=5167 y=0167 x=5179 y=0179 x=5197 y=0197
x=5227 y=0227 x=5233 y=0233 x=5281 y=0281
x=5347 y=0347 x=5419 y=0419 x=5431 y=0431
x=5443 y=0443 x=5449 y=0449 x=5479 y=0479
x=5503 y=0503 x=5521 y=0521 x=5557 y=0557
x=5563 y=0563 x=5569 y=0569 x=5641 y=0641
x=5647 y=0647 x=5653 y=0653 x=5659 y=0659
x=5683 y=0683 x=5701 y=0701 x=5743 y=0743
x=5821 y=0821 x=5827 y=0827 x=5839 y=0839
x=5857 y=0857 x=5881 y=0881 x=5953 y=0953
x=6091 y=1091 x=6151 y=1151 x=6163 y=1163
x=6217 y=1217 x=6229 y=1229 x=6277 y=1277
x=6301 y=1301 x=6361 y=1361 x=6367 y=1367
x=6373 y=1373 x=6427 y=1427 x=6451 y=1451
x=6481 y=1481 x=6553 y=1553 x=6571 y=1571
x=6607 y=1607 x=6619 y=1619 x=6637 y=1637
x=6709 y=1709 x=6733 y=1733 x=6823 y=1823
x=6871 y=1871 x=6907 y=1907 x=6949 y=1949
x=6997 y=1997 x=7027 y=2027 x=7039 y=2039
x=7069 y=2069 x=7129 y=2129 x=7207 y=2207
x=7213 y=2213 x=7237 y=2237 x=7243 y=2243
x=7297 y=2297 x=7309 y=2309 x=7333 y=2333
x=7351 y=2351 x=7393 y=2393 x=7411 y=2411
x=7417 y=2417 x=7459 y=2459 x=7477 y=2477
x=7549 y=2549 x=7591 y=2591 x=7621 y=2621
x=7687 y=2687 x=7699 y=2699 x=7741 y=2741
x=7753 y=2753 x=7789 y=2789 x=7879 y=2879
x=7927 y=2927 x=7963 y=2963 x=8011 y=3011
x=8089 y=3089 x=8167 y=3167 x=8191 y=3191

x=8209 y=3209 x=8221 y=3221 x=8329 y=3329
x=8389 y=3389 x=8461 y=3461 x=8467 y=3467
x=8527 y=3527 x=8539 y=3539 x=8581 y=3581
x=8623 y=3623 x=8677 y=3677 x=8719 y=3719
x=8761 y=3761 x=8779 y=3779 x=8803 y=3803
x=8821 y=3821 x=8863 y=3863 x=8923 y=3923
x=8929 y=3929 x=9001 y=4001 x=9007 y=4007
x=9013 y=4013 x=9049 y=4049 x=9091 y=4091
x=9127 y=4127 x=9133 y=4133 x=9157 y=4157
x=9241 y=4241 x=9283 y=4283 x=9337 y=4337
x=9349 y=4349 x=9391 y=4391 x=9397 y=4397
x=9421 y=4421 x=9463 y=4463 x=9547 y=4547
x=9643 y=4643 x=9649 y=4649 x=9679 y=4679
x=9721 y=4721 x=9733 y=4733 x=9787 y=4787
x=9817 y=4817 x=9871 y=4871 x=9931 y=4931
x=9967 y=4967 x=9973 y=4973 x=10009 y=5009
x=10039 y=5039 x=10099 y=5099 x=10273 y=5273
x=10303 y=5303 x=10333 y=5333 x=10399 y=5399
x=10477 y=5477 x=10501 y=5501 x=10531 y=5531
x=10639 y=5639 x=10651 y=5651 x=10657 y=5657
x=10711 y=5711 x=10861 y=5861 x=10867 y=5867
x=10903 y=5903 x=10939 y=5939 x=10987 y=5987
x=11047 y=6047 x=11113 y=6113 x=11131 y=6131
x=11173 y=6173 x=11197 y=6197 x=11257 y=6257
x=11287 y=6287 x=11299 y=6299 x=11311 y=6311
x=11317 y=6317 x=11329 y=6329 x=11353 y=6353
x=11491 y=6491 x=11551 y=6551 x=11689 y=6689
x=11701 y=6701 x=11719 y=6719 x=11779 y=6779
x=11827 y=6827 x=11833 y=6833 x=11863 y=6863
x=11959 y=6959 x=11971 y=6971 x=12043 y=7043

x=12109 y=7109　x=12211 y=7211　x=12253 y=7253
x=12433 y=7433　x=12451 y=7451　x=12457 y=7457
x=12487 y=7487　x=12517 y=7517　x=12541 y=7541
x=12547 y=7547　x=12577 y=7577　x=12583 y=7583
x=12589 y=7589　x=12703 y=7703　x=12757 y=7757
x=12823 y=7823　x=12829 y=7829　x=12841 y=7841
x=12853 y=7853　x=12907 y=7907　x=12919 y=7919
x=13009 y=8009　x=13093 y=8093　x=13147 y=8147
x=13171 y=8171　x=13219 y=8219　x=13291 y=8291
x=13297 y=8297　x=13513 y=8513　x=13537 y=8537
x=13597 y=8597　x=13627 y=8627　x=13669 y=8669
x=13681 y=8681　x=13693 y=8693　x=13807 y=8807
x=13831 y=8831　x=13933 y=8933　x=13963 y=8963
x=13999 y=8999　x=14011 y=9011　x=14029 y=9029
x=14173 y=9173　x=14221 y=9221　x=14281 y=9281
x=14293 y=9293　x=14323 y=9323　x=14341 y=9341
x=14419 y=9419　x=14431 y=9431　x=14437 y=9437
x=14461 y=9461　x=14479 y=9479　x=14533 y=9533
x=14551 y=9551　x=14629 y=9629　x=14767 y=9767
x=14851 y=9851　x=14887 y=9887　x=14923 y=9923
x=14929 y=9929

第四章　含素因子 3，5 的偶数

为了便于讨论首先引进如下定义。

孪生素数中值定义：孪生素数中所含两个素数之间的偶数（即两素数的算术平均值）称为该孪生素数的中值。

本章将要讨论的命题是，含素因子 3，5 的偶数都可表为两个孪生素数中值之和。

4.1　求解证明

设，A 为含有素因子 3 和 5 的任意大偶数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示，则集合 E 的基数 $|E|$ 等于 A。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 全部素数集合 P，且将集合 P 中的元素按数值大小顺序排列如下，$P=(p_1,p_2,...,p_r)$

$$2=p_1<p_2<...<p_r\leqslant A^{1/2} \tag{1}$$

A 为偶数，故可用下式表示，

$$A=2n \qquad (n\text{ 为正整数}) \tag{2}$$

将大于 1 且不超过 $n+1$ 的全部正整数集合用 N 表示，则集合 N 的基数 $|N|$ 等于 n

$$|N|=n \tag{3}$$

以集合 P 中元素为模数求得同余式组，

$$A\equiv A_i\ (\bmod p_i), \qquad i=1,2,...,r$$

A_i 为非负的最小剩余（下同）。

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定以下筛选条件：

$$g\neq 0\ (\bmod p_i) \qquad i=1,2,...,r \tag{4}$$

$$g \neq 2 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\dots,r \tag{5}$$

$$g \neq A_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\dots,r \tag{6}$$

$$g \neq A_i+2 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\dots,r \tag{7}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（4）（5）（6）（7）式条件的元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

4.1.1　求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中的元素为互不相同的素数。根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = n\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{8}$$

根据第一章（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{p_i}{n}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{9}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。下面来具体确定 α_i 的数值，

当 i=1 时，p_1=2

　　A 为偶数，故 $A_1=0$

由此知，（4），（5），（6），（7）式四个筛选条件等价为下面的一个条件。

$$g \neq 0 \pmod{p_1} \tag{10}$$

根据（10）式可知，集合 N 中模 p_1 的“0 同余类子集”应该筛掉，被选取的只有模 p_1 的“1 同余类子集”一个，故得

$$\alpha_1 = 1 \tag{11}$$

当 i=2 时， $p_2=3$

A 含素因子 3，故 $A_2=0$

由此知，（4），（5），（6），（7）式四个筛选条件合并为以下两个筛选条件。

$$g \neq 0 \pmod{p_2} \tag{12}$$

$$g \neq 2 \pmod{p_2} \tag{13}$$

依据（12），（13）式可知，集合 N 中只有模 p_2 的“1 同余类子集”这一个子集被选取，故得：

$$\alpha_2=1 \tag{14}$$

当 i=3 时， $p_3=5$

A 含素因子 5，故 $A_3=0$

同上，（4），（5），（6），（7）式四个筛选条件合并为以下两个筛选条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_3} \tag{15}$$

$$g \neq 2 \pmod{p_3} \tag{16}$$

根据（15），（16）式可知，集合 N 中模 p_3 的“0 同余类子集”和“2 同余类子集”都不符合条件，应当筛掉，其余 3 个模 p_3 的同余类子集都符合筛选条件，应被选取，故得，

$$\alpha_3=3 \tag{17}$$

当 $i>3$ 时，分以下三种情况，

其一， $A_i=0$ ， $(i>3)$

此时，（4），（5），（6），（7）式四个筛选条件合并为以下两个筛选条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_i}, \qquad i>3 \tag{18}$$

$$g \neq 2 \pmod{p_i}, \qquad i>3 \tag{19}$$

依据（18），（19）式可知，集合 N 中除去模 p_i 的“0 同余类子集”和“2 同余类子集”外，其余(p_i-2)个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件，应被选取，故得

$$\alpha_i = p_i - 2 \qquad (A_i = 0，\ i > 3) \tag{20}$$

其二，$A_i = 2$ 或 $A_i = p_i - 2$，$i > 3$

此时，（4），（5），（6），（7）式四个筛选条件合并为以下三个筛选条件：

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}， \qquad i > 3 \tag{21}$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}， \qquad i > 3 \tag{22}$$

$$g \not\equiv 4或p_i - 2 \pmod{p_i}， \qquad i > 3 \tag{23}$$

依据（21），（22），（23）式可知，集合 N 中除去模 p_i 的“0 同余类子集”“2 同余类子集”和“$(4或p_i-2)$同余类子集”外，其余$(p_i\text{-}3)$个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件，应被选取，故得

$$\alpha_i = p_i - 3 \qquad (A_i = 2或p_i - 2，\ i > 3) \tag{24}$$

其三，$A_i \neq 0,\ 2,\ p_i - 2 \qquad (i > 3)$

此时，（4），（5），（6），（7）式四个筛选条件不可合并，由此四个条件可知，集合 N 中除去模 p_i 的“0 同余类子集”“2 同余类子集”“A_i 同余类子集”和“(A_i+2)同余类子集”外，其余（p_i-4）个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件，应被选取，故得

$$\alpha_i = p_i - 4 \quad (A_i \neq 0,2，\ p_i - 2，i > 3) \tag{25}$$

令

$$\theta = \begin{cases} 2, A_i = 0 \\ 3, A_i = 2或p_i - 2 \\ 4, A_i \neq 0,2, p_i - 2 \end{cases} \tag{26}$$

引入θ之后，可将（20），（24）和（25）式合并

$$\alpha_i = p_i - \theta \qquad i > 3 \tag{27}$$

将（11），（14），（17）和（27）式代入（8）式，得基数$|N_B|$的近似估算式为

$$|N_B| = (\frac{n}{10})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i - \theta}{p_i}) \tag{28}$$

将（11），（14），（17）和（27）式代入（9）式,得基数$|N_B|$的下界计算公式为

$$|N_B| > F_1(\frac{n}{10})\prod_{i=4}^{r}\{\frac{p_i - \theta}{p_i}\} \tag{29}$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{p_i}{n}) > 1 - (\frac{1}{n})\sum_{i=1}^{r} p_i \tag{30}$$

由于$F_1>0$，依据第一章（64）式,可将（29）式改写为

$$|N_B| > F_1(\frac{n}{10})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \tag{31}$$

由第一章（77）式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \tag{32}$$

（32）式表示，数值越大的区域素数分布的密度越小，故得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < (\frac{1}{2})(p_1 + p_r)\Pi(p_r) \tag{33}$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < 6\ln 2(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{34}$$

由（33）式和（34）式可得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < \frac{2.08(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{35}$$

由（35）式和（30）式可得

$$F_1 > 1 - \frac{2.08(p_1+p_r)p_r}{n\ln p_r} \tag{36}$$

将（36）式代入（31）式，得

$$|N_B| > \{(\frac{n}{10}) - \frac{0.208(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r}\}\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{37}$$

将 $n/10$ 作以下变换

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_4}{p_6-4}) + \frac{2n}{10(p_6-4)} \tag{38}$$

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_5}{p_7-4}) + \frac{2n}{10(p_7-4)} \tag{39}$$

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_6}{p_8-4}) + \frac{2n}{10(p_8-4)} \tag{40}$$

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_7}{p_9-4}) + \frac{2n}{10(p_9-4)} \tag{41}$$

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_8}{p_{10}-4}) + \frac{6n}{10(p_{10}-4)} \tag{42}$$

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_9}{p_{11}-4}) + \frac{4n}{10(p_{11}-4)} \tag{43}$$

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_{10}}{p_{12}-4}) + \frac{4n}{10(p_{12}-4)} \tag{44}$$

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_{11}}{p_{13}-4}) + \frac{6n}{10(p_{13}-4)} \tag{45}$$

$$\frac{n}{10} = (\frac{n}{10})(\frac{p_{12}}{p_{14}-4}) + \frac{2n}{10(p_{14}-4)} \tag{46}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{13}}{p_{15}-4})+\frac{2n}{10(p_{15}-4)} \tag{47}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{14}}{p_{16}-4})+\frac{6n}{10(p_{16}-4)} \tag{48}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{15}}{p_{17}-4})+\frac{8n}{10(p_{17}-4)} \tag{49}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{16}}{p_{18}-4})+\frac{4n}{10(p_{18}-4)} \tag{50}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{17}}{p_{19}-4})+\frac{4n}{10(p_{19}-4)} \tag{51}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{18}}{p_{20}-4})+\frac{6n}{10(p_{20}-4)} \tag{52}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{19}}{p_{21}-4})+\frac{2n}{10(p_{21}-4)} \tag{53}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{20}}{p_{22}-4})+\frac{4n}{10(p_{22}-4)} \tag{54}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{21}}{p_{23}-4})+\frac{6n}{10(p_{23}-4)} \tag{55}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{22}}{p_{24}-4})+\frac{6n}{10(p_{24}-4)} \tag{56}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{23}}{p_{25}-4})+\frac{10n}{10(p_{25}-4)} \tag{57}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{24}}{p_{26}-4})+\frac{8n}{10(p_{26}-4)} \tag{58}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{25}}{p_{27}-4})+\frac{2n}{10(p_{27}-4)} \tag{59}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{26}}{p_{28}-4})+\frac{2n}{10(p_{28}-4)} \tag{60}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{27}}{p_{29}-4})+\frac{2n}{10(p_{29}-4)} \tag{61}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{28}}{p_{30}-4})+\frac{2n}{10(p_{30}-4)} \tag{62}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{29}}{p_{31}-4})+\frac{14n}{10(p_{31}-4)} \tag{63}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{30}}{p_{32}-4})+\frac{14n}{10(p_{32}-4)} \tag{64}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{31}}{p_{33}-4})+\frac{6n}{10(p_{33}-4)} \tag{65}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{32}}{p_{34}-4})+\frac{4n}{10(p_{34}-4)} \tag{66}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{33}}{p_{35}-4})+\frac{8n}{10(p_{35}-4)} \tag{67}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{34}}{p_{36}-4})+\frac{8n}{10(p_{36}-4)} \tag{68}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{35}}{p_{37}-4})+\frac{4n}{10(p_{37}-4)} \tag{69}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{36}}{p_{38}-4})+\frac{8n}{10(p_{38}-4)} \tag{70}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{37}}{p_{39}-4})+\frac{6n}{10(p_{39}-4)} \tag{71}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{38}}{p_{40}-4})+\frac{6n}{10(p_{40}-4)} \tag{72}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{39}}{p_{41}-4})+\frac{8n}{10(p_{41}-4)} \tag{73}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{40}}{p_{42}-4})+\frac{4n}{10(p_{42}-4)} \tag{74}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{41}}{p_{43}-4})+\frac{8n}{10(p_{43}-4)} \tag{75}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{42}}{p_{44}-4})+\frac{8n}{10(p_{44}-4)} \tag{76}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{43}}{p_{45}-4})+\frac{2n}{10(p_{45}-4)} \tag{77}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{44}}{p_{46}-4})+\frac{2n}{10(p_{46}-4)} \tag{78}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{45}}{p_{47}-4})+\frac{10n}{10(p_{47}-4)} \tag{79}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{46}}{p_{48}-4})+\frac{20n}{10(p_{48}-4)} \tag{80}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{47}}{p_{49}-4})+\frac{12n}{10(p_{49}-4)} \tag{81}$$

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})(\frac{p_{48}}{p_{50}-4})+\frac{2n}{10(p_{50}-4)} \tag{82}$$

将（38），（39），……，（82）式逐次代入右端第一项可得

$$\frac{n}{10}=(\frac{n}{10})\prod_{j=6}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+F_2 \tag{83}$$

$$F_2=\{\frac{2n}{10(p_6-4)}\}\prod_{j=7}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{2n}{10(p_7-4)}\}\prod_{j=8}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{2n}{10(p_8-4)}\}\prod_{j=9}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{2n}{10(p_9-4)}\}\prod_{j=10}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{6n}{10(p_{10}-4)}\}\prod_{j=11}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{4n}{10(p_{11}-4)}\}\prod_{j=12}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{4n}{10(p_{12}-4)}\}\prod_{j=13}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{6n}{10(p_{13}-4)}\}\prod_{j=14}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{2n}{10(p_{14}-4)}\}\prod_{j=15}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{2n}{10(p_{15}-4)}\}\prod_{j=16}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{6n}{10(p_{16}-4)}\}\prod_{j=17}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{8n}{10(p_{17}-4)}\}\prod_{j=18}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{4n}{10(p_{18}-4)}\}\prod_{j=19}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{4n}{10(p_{19}-4)}\}\prod_{j=20}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{6n}{10(p_{20}-4)}\}\prod_{j=21}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{2n}{10(p_{21}-4)}\}\prod_{j=22}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{4n}{10(p_{22}-4)}\}\prod_{j=23}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{6n}{10(p_{23}-4)}\}\prod_{j=24}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{6n}{10(p_{24}-4)}\}\prod_{j=25}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{10n}{10(p_{25}-4)}\}\prod_{j=26}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{8n}{10(p_{26}-4)}\}\prod_{j=27}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{2n}{10(p_{27}-4)}\}\prod_{j=28}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{2n}{10(p_{28}-4)}\}\prod_{j=29}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{2n}{10(p_{29}-4)}\}\prod_{j=30}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{2n}{10(p_{30}-4)}\}\prod_{j=31}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{14n}{10(p_{31}-4)}\}\prod_{j=32}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{14n}{10(p_{32}-4)}\}\prod_{j=33}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{6n}{10(p_{33}-4)}\}\prod_{j=34}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{4n}{10(p_{34}-4)}\}\prod_{j=35}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{8n}{10(p_{35}-4)}\}\prod_{j=36}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{8n}{10(p_{36}-4)}\}\prod_{j=37}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{4n}{10(p_{37}-4)}\}\prod_{j=38}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{8n}{10(p_{38}-4)}\}\prod_{j=39}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{6n}{10(p_{39}-4)}\}\prod_{j=40}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{6n}{10(p_{40}-4)}\}\prod_{j=41}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{8n}{10(p_{41}-4)}\}\prod_{j=42}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{4n}{10(p_{42}-4)}\}\prod_{j=43}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{8n}{10(p_{43}-4)}\}\prod_{j=44}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{8n}{10(p_{44}-4)}\}\prod_{j=45}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{2n}{10(p_{45}-4)}\}\prod_{j=46}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{2n}{10(p_{46}-4)}\}\prod_{j=47}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+\{\frac{10n}{10(p_{47}-4)}\}\prod_{j=48}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{20n}{10(p_{48}-4)}\}\prod_{j=49}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$\{\frac{12n}{10(p_{49}-4)}\}\{\frac{p_{48}}{p_{50}-4}\}+\{\frac{2n}{10(p_{50}-4)}\} \tag{84}$$

将 $p_5=11$，$p_6=13$，$p_7=17$，$p_8=19$，$p_9=23$，$p_{10}=29$，$p_{11}=31$，$p_{12}=37$，$p_{13}=41$，$p_{14}=43$，$p_{15}=47$，$p_{16}=53$，$p_{17}=59$，$p_{18}=61$，$p_{19}=67$，$p_{20}=71$，$p_{21}=73$，$p_{22}=79$，$p_{23}=83$，$p_{24}=89$，$p_{25}=97$，$p_{26}=101$，$p_{27}=103$，$p_{28}=107$，$p_{29}=109$，$p_{30}=113$，$p_{31}=127$，$p_{32}=131$，$p_{33}=137$，$p_{34}=139$，$p_{35}=149$，$p_{36}=151$，$p_{37}=157$，$p_{38}=163$，$p_{39}=167$，$p_{40}=173$，$p_{41}=179$，$p_{42}=181$，$p_{43}=191$，$p_{44}=193$，$p_{45}=197$，$p_{46}=199$，$p_{47}=211$，$p_{48}=223$，$p_{49}=227$，$p_{50}=229$ 代入（84）式得

$$F_2=0.097n \tag{85}$$

（85）代入（83）再代入（37）式可得

$$|N_B| > (\frac{n}{10})\prod_{j=6}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i})+F_3 \tag{86}$$

$$F_3=\{0.097n-\frac{0.208(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r}\}\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{87}$$

将（1），（2）式代入（87）式得

$$F_3 \geq F_4 p_r \prod_{i=4}^{r}\{\frac{p_i-4}{p_i}\} \tag{88}$$

$$F_4=0.0485p_r-\frac{0.208(p_1+p_r)}{\ln p_r} \tag{89}$$

$$\frac{dF_4}{dp_r}=0.0485-0.208\{\frac{\ln p_r-(p_1+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\}=$$

$$0.0485-\frac{0.208}{\ln p_r}+\frac{0.208(p_1+p_r)}{p_r\ln^2 p_r}>0.0485-\frac{0.208}{\ln p_r} \tag{90}$$

令　$0.0485-\dfrac{0.208}{\ln p_r}>0$　可得

$$p_r > e^{4.2887}=73 \tag{91}$$

将条件（91）代入（90）式可得

$$\frac{dF_4}{dp_r}>0 \qquad (p_r>73) \tag{92}$$

由（92）式可知，当 $p_r>73$ 时，F_4 为 p_r 的递增函数。

而当，$A \geqslant 60\,000$ 时，$p_r \geqslant 241>73$

且 $F_4(p_r=241)=2.4732>2$

故知　$F_4>2$　（$A\geqslant 60\,000$）　（93）

将（93）式代入（88）式得

$$F_3 \geq 2p_r\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{94}$$

已知，$p_i - 4 \geqslant p_{i-2}$，　　$i \geqslant 4$　　（95）

由（94），（95）式可知

$$F_3 \geqslant 2p_r \prod_{i=4}^{r} (\frac{p_{i-2}}{p_i}) = \frac{2p_r p_2 p_3}{p_{r-1} p_r} = \frac{30}{p_{r-1}} > 0 \tag{96}$$

将（95），（96）代入（86）式得

$$|N_B| > (\frac{n}{10})(\frac{3}{p_4})(\frac{7}{p_5}) \prod_{i=6}^{r} \{\frac{p_{i-2}}{p_i}\} \tag{97}$$

将（1），（2）式代入（97）式可得

$$|N_B| > (\frac{21{p_r}^2}{20 p_4 p_5})(\frac{p_4 p_5}{p_{r-1} p_r}) \tag{98}$$

已知　　$p_r \geqslant p_{r-1} + 2$，　　故得

$$|N_B| > \frac{21}{20} + \frac{2.1}{p_{r-1}} > 1.05 \tag{99}$$

4.1.2 通过子集 N_B 求解

我们从子集 N_B 中任取一个元素 x_1，再引入参量：

$$x_2 = x_1 - 2 \tag{101}$$

$$y_1 = A - x_1 \tag{102}$$

$$y_2 = A - x_1 + 2 \tag{103}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$x_1 \equiv x_{1i} \pmod{p_i}$，　　$i = 1,2,\ldots,r$

$x_2 \equiv x_{2i} \pmod{p_i}$，　　$i = 1,2,\ldots,r$

$y_1 \equiv y_{1i} \pmod{p_i}$，　　$i = 1,2,\ldots,r$

$y_2 \equiv y_{2i} \pmod{p_i}$，　　$i = 1,2,\ldots,r$

根据定义可知

$x_1 \in E$，　　$x_1 > 1$　　（104）

$$x_2 \in E\text{，}\qquad x_2 > 1 \tag{105}$$

$$y_1 \in E\text{，}\qquad y_1 > 1 \tag{106}$$

$$y_2 \in E\text{，}\qquad y_2 > 1 \tag{107}$$

由于 $x_1 \in N_B$，根据（4），（5），（6），（7）式四个筛选条件可知

$$x_{1i} \neq 0\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{108}$$

$$x_{1i} \neq 2\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{109}$$

$$x_{1i} \neq A_i\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{110}$$

$$x_{1i} \neq A_i + 2\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{111}$$

依据同余式的性质，由（101），（102）和（103）式可以推得

$$x_{2i} \equiv x_{1i} - 2 \pmod{p_i}\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{112}$$

$$y_{1i} \equiv A_i - x_{1i} \pmod{p_i}\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{113}$$

$$y_{2i} \equiv A_i - x_{1i} + 2 \pmod{p_i}\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{114}$$

由（109）式和（112）式可知

$$x_{2i} \neq 0\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{115}$$

由（110）式和（113）式可知

$$y_{1i} \neq 0\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{116}$$

由（111）式和（114）式可知

$$y_{2i} \neq 0\text{，}\qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{117}$$

根据第一章引理 3，由（104）和（108）式可知 x_1 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（105）和（115）式可知 x_2 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（106）和（116）式可知 y_1 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（107）和（117）式可知 y_2 为奇素数

由(101)式可得：$x_1 - x_2 = 2$　（118）

可见，(x_1, x_2) 为一对孪生素数，它的中值用 x_3 表示。

$$x_3 = (x_1 + x_2)/2 = x_1 - 1 \tag{119}$$

将（103），（102）两端相减，可得

$$y_2 - y_1 = 2 \tag{120}$$

可见，(y_1, y_2) 为一对孪生素数，它的中值用 y_3 表示。

$$y_3 = (y_1 + y_2)/2 = A - x_1 + 1 \tag{121}$$

将（119）和（121）式两端相加，得

$$A = x_3 + y_3 \tag{122}$$

（122）式即为所求关系式。考虑到（93）式的限制条件，（122）式表示不小于 60 000 的含素因子 3 和 5 的任意大偶数都可表为两个孪生素数中值之和。

小于 60 000 的含素因子 3 和 5 的偶数皆可用数值验证方法得到证明。

4.2 解的完备性问题

上述求解方法，通过集合 N_B 求得的解并非偶数 A 的全解。因为它不涉及小于 $A^{1/2}$ 部分的解，关于这一部分解，可以通过下面给出的补充求解方法求得。

延用 4.1 节的定义符号：

$$E = (1,2,\dots,A)$$

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \le A^{1/2} \tag{123}$$

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\dots,r$$

再引一个新的素数集合 P_H。

$$P_H = P \bigcup p_{r+1} = (p_1, p_2, \dots, p_r, p_{r+1}) \tag{124}$$

$$p_{r+1} = p_r + 2 \tag{125}$$

从集合 P_H 中，用筛选方法分选出必要的子集。

给定筛选条件如下：

$$p_{r+1} \neq 0 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{126}$$

$$g-2 \in P, \tag{127}$$

$$g \neq A_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r,r+1 \tag{128}$$

$$g \neq A_i+2 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r,r+1 \tag{129}$$

g 表示集合 P_H 中的被选元素。

从集合 P 中将同时符合（127），（128），（129）式的所有元素与同时符合（126），（127），（128），（129）式的 p_{r+1} 一起组成 P_{HB}。

根据筛选条件（126）式可知，集合 P_{HB} 中的元素 p_{r+1} 为奇素数，根据筛选条件（127）式可知 p_1 和 p_2 都不属于 P_{HB}。所以，集合 P_{HB} 中的元素（当 P_{HB} 不为空集时）只能是奇素数。

假若　$P_{HB} \neq \varnothing$　（130）

我们从集合 P_{HB} 中任取一个元素 ξ_1，再引入参量：

$$\xi_2 = \xi_1 - 2 \tag{131}$$

$$\beta_1 = A - \xi_1 \tag{132}$$

$$\beta_2 = A - \xi_1 + 2 \tag{133}$$

并由该三个定义式可知

$$\xi_2 \in E, \qquad \xi_2 > 1 \tag{134}$$

$$\beta_1 \in E, \qquad \beta_1 > 1 \tag{135}$$

$$\beta_2 \in E, \qquad \beta_2 > 1 \tag{136}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$\xi_1 \equiv \xi_{1i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{137}$$

$$\beta_1 \equiv \beta_{1i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{138}$$

$$\beta_2 \equiv \beta_{2i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{139}$$

由于 $\xi_1 \in P_{HB}$，根据筛选条件（127），（128）和（129）式可知

$$\xi_1 - 2 \in P \tag{140}$$

$$\xi_{1i} \neq A_i, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{141}$$

$$\xi_{1i} \neq A_i + 2, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{142}$$

依据同余式的性质，由（132），（133）式可推得

$$\beta_{1i} \equiv A_i - \xi_{1i} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{143}$$

$$\beta_{2i} \equiv A_i - \xi_{1i} + 2 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{144}$$

由（141）和（143）式可知：

$$\beta_{1i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{145}$$

由（142）式和（144）式可知

$$\beta_{2i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{146}$$

由（131）式和（140）式可知，ξ_2 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（135）和（145）式可知，β_1 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（136）和（146）式可知，β_2 为奇素数。

将（131）式移项可得

$$\xi_1 - \xi_2 = 2 \tag{147}$$

故知，(ξ_1, ξ_2) 为一对孪生素数，它的中值用 ξ_3 表示，则

$$\xi_3 = (\xi_1 + \xi_2)/2 = \xi_1 - 1 \tag{148}$$

将（133）和（132）两端相减，可得

$$\beta_2 - \beta_1 = 2 \tag{149}$$

故知，(β_1, β_2) 为一对孪生素数，它的中值用 β_3 表示，则

$$\beta_3 = (\beta_1 + \beta_2)/2 = A - \xi_1 + 1 \tag{150}$$

将（148）式和（150）式两端相加得

$$A = \xi_3 + \beta_3 \tag{151}$$

（151）式即表明(ξ_1,ξ_2)和(β_1,β_2)为满足（122）式的两对孪生素数。

ξ_1为集合P_{HB}中任一元素，故P_{HB}中每个元素都对应满足（122）式的两对孪生素数。

4.3　求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>含素因子 3、5 的偶数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
            var a=form1.a.value;
            if(a==""||a==null){
              alert("请输入偶数（30 的倍数）！ ");
              return;
            }else if(parseInt(a)%30!=0||parseInt(a)<30){
              alert("输入的偶数必须是 30 的倍数！ ");
              return;
            }form1.submit();
 }
 </script>

 </head>
```

```
<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
含素因子 3、5 的偶数求解程序</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的偶数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
  <table width="500" border="0" align="center" cellpadding
="5" cellspacing="0">
      <tr>
        <td width="232" align="right">请输入偶数（30 的倍
数）：</td>
        <td width="248"><input name="a" type="text" id="a">
</td>
      </tr>
        <tr>
      <td align="center" colspan="2"><input type="button" name=
"Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
             
         <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
      </tr>
  </table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
%>
```

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>含素因子 3、5 的偶数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点
击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none">
<font color="#FF0000" size="5"><strong>含素因子 3、5 的偶数求
解运算结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
var array_ai = new Array();
var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<30 || a % 30 !=0)
{
```

```
        document.write("输入错误！ ");
    }else{
    document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的偶数 a 为：
</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"     
<font color=#FF0000 size='4'>n = a/2="+parseInt(a/2)+"</font>
</font><br>");
    n=parseInt(a/2);
    n=n+1
    //alert(n);
    pr=Math.sqrt(a);
    pr=parseInt(pr);
    //i=0
    var i1=1;
    //var i2=1;
    ther=0;
    i=0
    //alert(pr);
    for(pi=2;pi<=pr;pi++)
    {//alert(array_pi[i]);
                flag=1;
                for(j=2;j<=(pi/2);j++)
                {
                  if(pi%j==0)
                  {
                        flag=0;
                        break;
                  }
                }
                if(flag==1)
                {
                  //ni=n%pi;
```

```
                //array_ni[i]=ni;
                array_pi[i]=pi;
                //array_pi2[i]=pi;
                array_ai[i]=a%pi;
                //array_pi_ni[i]=pi-ni
                //alert(array_pi[i]);
                i++;
            }
    }

    ther=i;


    for(i=0;i<n-1;i++){
            array_n[i]=i+2;
            //alert(array_n[i]);
    }

    for(i=0;i<array_n.length;i++)
    {
            for(k=0;k<array_pi.length;k++)
            {
              if(array_pi[k]>array_ai[k]+2){

            if((array_n[i]%array_pi[k]==0)||(array_n[i]%array
_pi[k]==2)||(array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k])||(array_n[i]%arra
y_pi[k]==array_ai[k]+2))
                    {
                        array_n[i]=0;
                        break;
                    }
```

```
                    }else{

                if((array_n[i]%array_pi[k]==0)||(array_n[i]%array
_pi[k]==2)||(array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k])||(array_n[i]%arra
y_pi[k]==array_ai[k]+2-array_pi[k]))
                            {
                                array_n[i]=0;
                                break;
                            }
                    }

                }
        }
        x=0;
        for(i=0;i<n-1;i++){
                if(array_n[i]>0){
                x++;
                //alert(array_n[i]);
                }
        }
        var xx=0
        for(i=1;i<array_pi.length;i++){
                if(array_pi[i]-array_pi[i-1]==2){
                  array_hi[xx]=array_pi[i];
                  //alert(array_hi[xx]);
                  xx++;
                }
        }


        var thepr2=array_pi[array_pi.length-1]+2;
```

```
var thepr2flag=1;
for(i=0;i<array_pi.length;i++){
        if(thepr2%array_pi[i]==0){
          thepr2flag=0;
          break;
        }
}if(thepr2flag==1){
        array_hi[xx]=thepr2;
        xx++;
}
//alert(array_pi.length);

if(array_hi.length>0){
        for(var xx1=0;xx1<array_hi.length;xx1++){
          for(i=0;i<array_pi.length;i++){
              //alert(array_hi[xx1]+"     "+array_ai[i]);
              if(array_pi[i]>array_ai[i]+2){

        if((array_hi[xx1]%array_pi[i]==array_ai[i])||(array
_hi[xx1]%array_pi[i]==array_ai[i]+2)){
                        //alert(array_hi[xx1]+"
"+array_ai[i]);

                        array_hi[xx1]=0;

                        break;
                   }
              }else{

        if((array_hi[xx1]%array_pi[i]==array_ai[i])||(array
_hi[xx1]%array_pi[i]==array_ai[i]+2-array_pi[i])){
                        //alert(array_hi[xx1]+"
```

```
"+array_ai[i]);
                                        array_hi[xx1]=0;

                                        break;
                                    }
                               }
                          }
                    }
      }
      xx=0;
      for(i=0;i<array_hi.length;i++){
                if(array_hi[i]>0){
                  xx++;
                }
      }
      if(xx>0){
                document.write("<br><font          color=#0000FF
size=3>从集合 P 中求得解的组数为：</font>" + xx + "<br>");
                document.write("<font color=#0000FF size=3>从
集合 P 中求得的解：</font><br>");
                var astr=new String(a);
                var thelength=astr.length;
                var x11,x22,y11,y22;
                m=1;
                for(i=0;i<array_hi.length;i++)
                {
                    switch(array_hi[i])
                    {
                        case 0: break;
                     default:
```

```
                    x1=array_hi[i];
                    //alert(x1);
                    y1=array_hi[i]-2;
                    x2=a-array_hi[i];
                    y2=a+2-array_hi[i];
                    x11=new String(x1);
                    for(var
iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
                         x11="0"+""+x11;
                    }
                    x22=new String(x2);
                    for(var
iii=x22.length;iii<thelength;iii++){
                         x22="0"+""+x22;
                    }
                    y11=new String(y1);
                    for(var
iii=y11.length;iii<thelength;iii++){
                         y11="0"+""+y11;
                    }
                    y22=new String(y2);
                    for(var
iii=y22.length;iii<thelength;iii++){
                         y22="0"+""+y22;
                    }
                    document.write("<font
size='4'>x</font>1="+x11+" <font size='4'>y</font>1="+y11+"  
 <font size='4'>x</font>2="+x22+" <font size='4'>y</font>2
="+y22+"；       ");
                    if(m%2==0)
                    {
```

```
                                        document.write("<br>");

                                    }
                                     m=m+1;
                            }

                    }
        }
        document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得解的组数为：</font>" + x + "<br>");
        if(x>0){
                    document.write("<font color=#0000FF size=3>从
集合 N 中求得的解：</font><br>");
                    var astr=new String(a);
                    var thelength=astr.length;
                    var x11,x22,y11,y22;
                    m=1;
                    for(i=0;i<n-1;i++)
                    {
                        switch(array_n[i])
                        {
                            case 0: break;
                         default:
                                x1=array_n[i];
                                y1=array_n[i]-2;
                                x2=a-array_n[i];
                                y2=a+2-array_n[i];
                                x11=new String(x1);
                                for(var
iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
                                      x11="0"+""+x11;
```

```
                    }
                    x22=new String(x2);
                    for(var
iii=x22.length;iii<thelength;iii++){
                        x22="0"+""+x22;
                    }
                    y11=new String(y1);
                    for(var
iii=y11.length;iii<thelength;iii++){
                        y11="0"+""+y11;
                    }
                    y22=new String(y2);
                    for(var
iii=y22.length;iii<thelength;iii++){
                        y22="0"+""+y22;
                    }
                    document.write("<font
size='4'>x</font>1="+x11+"   <font   size='4'>y</font>1="+y11+"
  <font size='4'>x</font>2="+x22+" <font size='4'>y<
/font>2="+y22+"；       ");
                    if(m%2==0)
                    {
                      document.write("<br>");

                    }
                     m=m+1;
                }

            }
      }
```

```
document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
}
</script>
</p></body>
</html>
```

4.4 实筛数据

输入的偶数 a 为：300　$n = a/2=150$

从集合 P 中求得的解的组数为：1

从集合 P 中求得的解：

$x1$=019　$y1$=017　$x2$=281　$y2$=283

从集合 N 中求得的解的组数为：6

从集合 N 中求得的解：

$x1$=031　$y1$=029　$x2$=269　$y2$=271

$x1$=061　$y1$=059　$x2$=239　$y2$=241

$x1$=073　$y1$=071　$x2$=227　$y2$=229

$x1$=103　$y1$=101　$x2$=197　$y2$=199

$x1$=109　$y1$=107　$x2$=191　$y2$=193

$x1$=151　$y1$=149　$x2$=149　$y2$=151

输入的偶数 a 为：6000　$n =a/2=3000$

从集合 N 中求得的解的组数为：12

从集合 N 中求得的解：

$x1$=0151　$y1$=0149　$x2$=5849　$y2$=5851

$x1$=0349　$y1$=0347　$x2$=5651　$y2$=5653

$x1$=0523　$y1$=0521　$x2$=5477　$y2$=5479

$x1$=1033　$y1$=1031　$x2$=4967　$y2$=4969

$x1$=1279　$y1$=1277　$x2$=4721　$y2$=4723

$x1$=1453　$y1$=1451　$x2$=4547　$y2$=4549

$x1$=1483　$y1$=1481　$x2$=4517　$y2$=4519
$x1$=1873　$y1$=1871　$x2$=4127　$y2$=4129
$x1$=1951　$y1$=1949　$x2$=4049　$y2$=4051
$x1$=1999　$y1$=1997　$x2$=4001　$y2$=4003
$x1$=2083　$y1$=2081　$x2$=3917　$y2$=3919
$x1$=3001　$y1$=2999　$x2$=2999　$y2$=3001

输入的偶数 a 为：90000　$n = a/2$=45000
从集合 P 中求得的解的组数为：2
从集合 P 中求得的解：
$x1$=00103　$y1$=00101　$x2$=89897　$y2$=89899
$x1$=00181　$y1$=00179　$x2$=89819　$y2$=89821
从集合 N 中求得的解的组数为：48
从集合 N 中求得的解：
$x1$=01999　$y1$=01997　$x2$=88001　$y2$=88003
$x1$=03373　$y1$=03371　$x2$=86627　$y2$=86629
$x1$=03469　$y1$=03467　$x2$=86531　$y2$=86533
$x1$=04549　$y1$=04547　$x2$=85451　$y2$=85453
$x1$=04639　$y1$=04637　$x2$=85361　$y2$=85363
$x1$=04801　$y1$=04799　$x2$=85199　$y2$=85201
$x1$=05023　$y1$=05021　$x2$=84977　$y2$=84979
$x1$=05479　$y1$=05477　$x2$=84521　$y2$=84523
$x1$=05653　$y1$=05651　$x2$=84347　$y2$=84349
$x1$=06361　$y1$=06359　$x2$=83639　$y2$=83641
$x1$=06661　$y1$=06659　$x2$=83339　$y2$=83341
$x1$=06781　$y1$=06779　$x2$=83219　$y2$=83221
$x1$=08629　$y1$=08627　$x2$=81371　$y2$=81373
$x1$=09769　$y1$=09767　$x2$=80231　$y2$=80233
$x1$=10303　$y1$=10301　$x2$=79697　$y2$=79699
$x1$=11491　$y1$=11489　$x2$=78509　$y2$=78511
$x1$=13999　$y1$=13997　$x2$=76001　$y2$=76003

$x1=14011$ $y1=14009$ $x2=75989$ $y2=75991$
$x1=15271$ $y1=15269$ $x2=74729$ $y2=74731$
$x1=17749$ $y1=17747$ $x2=72251$ $y2=72253$
$x1=17911$ $y1=17909$ $x2=72089$ $y2=72091$
$x1=18121$ $y1=18119$ $x2=71879$ $y2=71881$
$x1=18289$ $y1=18287$ $x2=71711$ $y2=71713$
$x1=19081$ $y1=19079$ $x2=70919$ $y2=70921$
$x1=19381$ $y1=19379$ $x2=70619$ $y2=70621$
$x1=19429$ $y1=19427$ $x2=70571$ $y2=70573$
$x1=19543$ $y1=19541$ $x2=70457$ $y2=70459$
$x1=20509$ $y1=20507$ $x2=69491$ $y2=69493$
$x1=20809$ $y1=20807$ $x2=69191$ $y2=69193$
$x1=22573$ $y1=22571$ $x2=67427$ $y2=67429$
$x1=22861$ $y1=22859$ $x2=67139$ $y2=67141$
$x1=24421$ $y1=24419$ $x2=65579$ $y2=65581$
$x1=25849$ $y1=25847$ $x2=64151$ $y2=64153$
$x1=28621$ $y1=28619$ $x2=61379$ $y2=61381$
$x1=30559$ $y1=30557$ $x2=59441$ $y2=59443$
$x1=31771$ $y1=31769$ $x2=58229$ $y2=58231$
$x1=31849$ $y1=31847$ $x2=58151$ $y2=58153$
$x1=32443$ $y1=32441$ $x2=57557$ $y2=57559$
$x1=33289$ $y1=33287$ $x2=56711$ $y2=56713$
$x1=34369$ $y1=34367$ $x2=55631$ $y2=55633$
$x1=35083$ $y1=35081$ $x2=54917$ $y2=54919$
$x1=38653$ $y1=38651$ $x2=51347$ $y2=51349$
$x1=41143$ $y1=41141$ $x2=48857$ $y2=48859$
$x1=41179$ $y1=41177$ $x2=48821$ $y2=48823$
$x1=41521$ $y1=41519$ $x2=48479$ $y2=48481$
$x1=42223$ $y1=42221$ $x2=47777$ $y2=47779$
$x1=43321$ $y1=43319$ $x2=46679$ $y2=46681$
$x1=43651$ $y1=43649$ $x2=46349$ $y2=46351$

第五章　素数的分项表示问题

本章将要证明的问题是，大于 5 的素数都可表示为一个奇素数与一个孪生素数中值之和。

孪生素数中值是指孪生素数中两素数之间的偶数，即是该两素数的算术平均值。

5.1　求解证明

设 A 为大于 10 211 的任意大素数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：$P=(p_1,p_2,\dots,p_r)$

$$2=p_1<p_2<\dots<p_r\leqslant A^{1/2} \tag{1}$$

以集合 P 中元素为模数，求得同余式组：

$$A\equiv A_i \pmod{p_i},\qquad i=1,2,\dots,r$$

A_i 为非负的最小剩余。

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示，则集合 N 的基数 $|N|$ 为：

$$|N|=A-p_r\geqslant {p_r}^2-p_r \tag{2}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g\not\equiv 0 \pmod{p_i},\qquad i=1,2,\dots,r \tag{3}$$

$$g\not\equiv A_i+1 \pmod{p_i},\qquad i=1,2,\dots,r \tag{4}$$

$$g\not\equiv A_i-1 \pmod{p_i},\qquad i=1,2,\dots,r \tag{5}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（3），（4），（5）式筛选条件的所有元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

5.1.1 求证筛函数的下界

已知，集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数，根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{r}(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{6}$$

根据第一章的（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N|\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{|N|})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{7}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体分析确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时，筛选条件（3），（4），（5）式具体为

$$g \neq 0 \pmod{p_1} \tag{8}$$

$$g \neq A_1 + 1 \pmod{p_1} \tag{9}$$

$$g \neq A_1 - 1 \pmod{p_1} \tag{10}$$

$$p_1 = 2$$

A 为奇素数，必然 $A_1 = 1$，由此推得：$A_1 + 1 = 2$，$A_1 - 1 = 0$。可见，（9）式和（10）式完全等同于（8）式。

根据（8）式可知，集合 N 中按模 p_1 只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_1 = 1 \tag{11}$$

当$i=2$时，筛选条件（3），（4），（5）式具体为

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_2} \tag{12}$$

$$g \not\equiv A_2+1 \pmod{p_2} \tag{13}$$

$$g \not\equiv A_2-1 \pmod{p_2} \tag{14}$$

$$p_2=3$$

A 为素数，必然不能被 3 整除，余数A_2只能是$A_2=1$或$A_2=2$。$A_2=1$时，（14）式与（12）式等价，$A_2=2$时，（13）式与（12）式等价。总之（12），（13）和（14）式中只有两个有效条件对应于两个不同的同余类了集。由此推知，集合N中按模p_2只有模p_2的一个同余类子集（“1 同余类子集”或“2 同余类子集”）符合筛选条件，故得

$$\alpha_2=1 \tag{15}$$

当$i>2$时，筛选条件（3），（4），（5）式根据A_i值的不同可分如下两种情况：

其一，$A_i=1$或者$A_i=p_i-1$。

此时，（3），（4），（5）式可以合并为两个条件。集合N中按模p_i应有p_i-2个模p_i的同余类子集符合筛选条件，故得：

$$\alpha_i=p_i-2, \qquad i>2 \tag{16}$$

其二，$A_i\neq 1$且$A_i\neq p_i-1$。

此时，（3），（4），（5）式对应于三个不同的同余类子集。集合N中按模p_i应有p_i-3个模p_i的同余类子集符合筛选条件，故得：

$$\alpha_i=p_i-3, \qquad i>2 \tag{17}$$

将（16），（17）式合并，得

$$\alpha_i=p_i-1-2^{\delta}, \qquad i>2 \tag{18}$$

$\delta_i = 0$ （$A_i = 1$ 或 $A_i = p_i - 1$）

$\delta_i = 1$ （$A_i \neq 1$ 且 $A_i \neq p_i - 1$）

将（11），（15）和（18）式代入（6）式得

$$|N_B| = \frac{|N|}{6}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 1 - 2^{\delta_i}}{p_i}) \tag{19}$$

$\delta_i = 0$ （$A_i = 1$ 或 $A_i = p_i - 1$）

$\delta_i = 1$ （$A_i \neq 1$ 且 $A_i \neq p_i - 1$）

将（11），（15）和（18）式代入（7）式得

$$|N_B| > F_1(\frac{|N|}{6})\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 1 - 2^{\delta_i}}{p_i}) \tag{20}$$

$\delta_i = 0$ （$A_i = 1$ 或 $A_i = p_i - 1$）

$\delta_i = 1$ （$A_i \neq 1$ 且 $A_i \neq p_i - 1$）

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{p_i}{|N|}) > 1 - \frac{1}{|N|}\sum_{i=1}^{r} p_i \tag{21}$$

由于 $F_1 > 0$，根据第一章（64）式可将（20）式改为

$$|N_B| > F_1(\frac{|N|}{6})\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 3}{p_i}) \tag{22}$$

由第一章（77）式推得

$$\Pi(x) - \Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \tag{23}$$

（23）式表示数值越大的区域素数分布的密度越小，由此可知

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < (\frac{1}{2})(p_1 + p_r)\Pi(p_r) \tag{24}$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < 6\ln 2(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{25}$$

（25）式代入（24）式得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < \frac{2.08(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{26}$$

将（26）式代入（21）式，可得

$$F_1 > 1 - \frac{2.08(p_1 + p_r)p_r}{|N|\ln p_r} \tag{27}$$

将（27）式代入（22）式，可得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{6} - \frac{2.08(p_1 + p_r)p_r}{6\ln p_r}\}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 3}{p_i}) \tag{28}$$

将 $|N|$ 作以下变换

$$|N| = |N|\{p_{10}/(p_{12} - 3)\} + 5|N|/(p_{12} - 3) \tag{29}$$

$$|N| = |N|\{p_{11}/(p_{13} - 3)\} + 7|N|/(p_{13} - 3) \tag{30}$$

$$|N| = |N|\{p_{12}/(p_{14} - 3)\} + 3|N|/(p_{14} - 3) \tag{31}$$

$$|N| = |N|\{p_{13}/(p_{15} - 3)\} + 3|N|/(p_{15} - 3) \tag{32}$$

$$|N| = |N|\{p_{14}/(p_{16} - 3)\} + 7|N|/(p_{16} - 3) \tag{33}$$

$$|N| = |N|\{p_{15}/(p_{17} - 3)\} + 9|N|/(p_{17} - 3) \tag{34}$$

$$|N| = |N|\{p_{16}/(p_{18} - 3)\} + 5|N|/(p_{18} - 3) \tag{35}$$

$$|N| = |N|\{p_{17}/(p_{19} - 3)\} + 5|N|/(p_{19} - 3) \tag{36}$$

$$|N| = |N|\{p_{18}/(p_{20} - 3)\} + 7|N|/(p_{20} - 3) \tag{37}$$

$$|N| = |N|\{p_{19}/(p_{21} - 3)\} + 3|N|/(p_{21} - 3) \tag{38}$$

$$|N| = |N|\{p_{20}/(p_{22} - 3)\} + 5|N|/(p_{22} - 3) \tag{39}$$

$$|N| = |N|\{p_{21}/(p_{23}-3)\} + 7|N|/(p_{23}-3) \qquad (40)$$

$$|N| = |N|\{p_{22}/(p_{24}-3)\} + 7|N|/(p_{24}-3) \qquad (41)$$

$$|N| = |N|\{p_{23}/(p_{25}-3)\} + 11|N|/(p_{25}-3) \qquad (42)$$

$$|N| = |N|\{p_{24}/(p_{26}-3)\} + 9|N|/(P_{26}-3) \qquad (43)$$

将（29）～（43）式逐次代入右端第一项得

$$|N| = |N|\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + F_2 \qquad (44)$$

$$\begin{aligned}F_2 = &(\frac{5|N|}{p_{12}-3})\prod_{i=13}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{7|N|}{p_{13}-3})\prod_{i=14}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + \\ &(\frac{3|N|}{p_{14}-3})\prod_{i=15}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{3|N|}{p_{15}-3})\prod_{i=16}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + \\ &(\frac{7|N|}{p_{16}-3})\prod_{i=17}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{9|N|}{p_{17}-3})\prod_{i=18}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + \\ &(\frac{5|N|}{p_{18}-3})\prod_{i=19}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{5|N|}{p_{19}-3})\prod_{i=20}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + \\ &(\frac{7|N|}{p_{20}-3})\prod_{i=21}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{3|N|}{p_{21}-3})\prod_{i=22}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + \\ &(\frac{5|N|}{p_{22}-3})\prod_{i=23}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{7|N|}{p_{23}-3})\prod_{i=24}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + \\ &(\frac{7|N|}{p_{24}-3})\prod_{i=25}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{11|N|}{p_{25}-3})(\frac{p_{24}}{p_{26}-3}) + \frac{9|N|}{p_{26}-3}\end{aligned} \qquad (45)$$

将 $P_{11}=31$，$P_{12}=37$，$P_{13}=41$，$P_{14}=43$，$P_{15}=47$，$P_{16}=53$，$P_{17}=59$，$P_{18}=61$，$P_{19}=67$，$P_{20}=71$，$P_{21}=73$，$P_{22}=79$，$P_{23}=83$，$P_{24}=89$，$P_{25}=97$，$P_{26}=101$ 代入（45）式可得

$$F_2 = 0.8|N| \tag{46}$$

将（46）式代入（44）式得

$$|N| = |N|\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3}) + 0.8|N| \tag{47}$$

将（47）式代入（28）式得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{6}\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i - 3}) + F_3\}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 3}{p_i}) \tag{48}$$

$$F_3 = 0.1333|N| - \frac{0.3466(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{49}$$

将（2）式代入（49）式，可得

$$F_3 \geqslant F_4 p_r \tag{50}$$

$$F_4 = 0.1333(p_r - 1) - \frac{0.3466(p_1 + p_r)}{\ln p_r} \tag{51}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}p_r} = 0.1333 - 0.3466\{\frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\} =$$

$$0.133\,3 - \frac{0.3466}{\ln p_r} + \frac{0.3466(p_1 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} > 0.1333 - \frac{0.3466}{\ln p_r} \tag{52}$$

令 $0.133\,3 - \dfrac{0.3466}{\ln p_r} > 0$

得 $p_r > 13.46$　（53）

将条件（53）式代入（52）式，可得

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}p_r} > 0, \qquad p_r > 13.46 \tag{54}$$

（54）式表明，当 $p_r > 13.46$ 时，F_4 为 p_r 的递增函数。

当 $A \geqslant 10211$ 时，$p_r \geqslant 101 > 13.46$

且 $F_4(p_r = 101) = 5.59$　　故得

$$F_4 \geqslant 5.59 \qquad A \geqslant 10211 \tag{55}$$

将（55）式代入（50）式得

$$F_3 \geqslant 5.59 p_r \tag{56}$$

将（56）式代入（48）式，可得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{6}\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + 5.59p_r\}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i-3}{p_i}) >$$

$$\frac{|N|}{6}\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})\prod_{j=3}^{r}(\frac{p_j-3}{p_j}) \tag{57}$$

已知 $p_j - 3 > p_{j-2}$， $\qquad j > 26$ （58）

由（57），（58）式可得

$$|N_B| > \frac{|N|}{6}\prod_{i=3}^{11}(\frac{p_i-3}{p_i})\prod_{j=12}^{r}(\frac{p_{j-2}}{p_j}) =$$

$$(\frac{|N|}{6})(\frac{2867200}{37182145})(\frac{728}{p_r p_{r-1}}) \tag{59}$$

将（2）式代入（59）式得

$$|N_B| > 9.356(\frac{p_r^{\ 2} - p_r}{p_r p_{r-1}}) > 9.356 \tag{60}$$

5.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一个元素 x^*，则

$$x^* \in E, \qquad x^* > 1 \tag{61}$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组：

$$x^* \equiv x^*_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

由于 $x^* \in N_B$，根据筛选条件（3）式可知

$$x^*_i \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{62}$$

根据第一章引理 3，由（61）和（62）式可知 x^* 为奇素数。

由此知，集合 N_B 中所有元素皆为奇素数。

由被筛集合 N 推知，集合 N_B 中大于 $A-3$ 的奇素数最多只有两个。也就是说，集合 N_B 中小于 $A-3$ 的元素个数至少为 $|N_B|-2$ 个。

由（60）式得

$$|N_B|-2>7.356 \tag{63}$$

从集合 N_B 中任取一个小于 $A-3$ 的元素 x 再引入参量：

$$y_1=A-x+1 \tag{64}$$

$$y_2=A-x-1 \tag{65}$$

根据定义可知：

$$x\in E, \quad x>1 \tag{66}$$

$$y_1\in E, \quad y_1>1 \tag{67}$$

$$y_2\in E, \quad y_2>1 \tag{68}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$x\equiv x_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$y_1\equiv y_{1i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$y_2\equiv y_{2i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$x\in N_B$，根据筛选条件（3），（4），（5）式可知

$$x_i\neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{69}$$

$$x_i\neq A_i+1, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{70}$$

$$x_i\neq A_i-1, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{71}$$

依据同余式的性质，由（64）和（65）式推得

$$y_{1i}\equiv A_i-x_i+1 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{72}$$

$$y_{2i}\equiv A_i-x_i-1 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{73}$$

由（70）式和（72）式可知

$$y_{1i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{74}$$

由（71）式和（73）式可知

$$y_{2i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{75}$$

根据第一章引理 3，由（66）和（69）式可知：x 为奇素数。
根据第一章引理 3，由（67）和（74）式可知：y_1 为奇素数。
根据第一章引理 3，由（68）和（75）式可知：y_2 为奇素数。

将（64）和（65）式两端相减，得

$$y_1 - y_2 = 2 \tag{76}$$

由（76）式可见，y_1 和 y_2 为一对孪生素数。用 y_3 表示该对孪生素数的中值，则

$$y_3 = (y_1 + y_2)/2 = A - x \tag{77}$$

由（77）式移项可得

$$A = x + y_3 \tag{78}$$

（78）式即为所要求证的数学表达式，式中奇素数 A 表示为奇素数 x 与孪生素数中值 y_3 之和。

x 为集合 N_B 中任取的一个小于 $A-3$ 的元素，故 N_B 中每个小于 $A-3$ 的元素都对应一组解（一个素数和一个孪生素数中值）。

（关于小于 10211 的奇素数（大于 5）可用数值验算方法得到求证。）

5.2 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数的分项表示问题</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
      var a=form1.a.value;
      if(a==""||a==null){
      alert("请输入素数（101 以上）！");
      return;
}else if(parseInt(a)<101){
      alert("对不起，输入的数必须是 101 以上的素数！");
      return;
}else{
      var flag=1;
      for(j=2;j<=((parseInt(a))/2);j++)
      {
            if(a%j==0)
            {
                  flag=0;
                  break;
            }
      }
      if(flag==0){
            alert("对不起，输入的数必须是 101 以上的素数！
");
            return;
      }
```

```
}form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
素数的分项表示问题</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的素数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
  <table width="500" border="0" align="center"
cellpadding="5" cellspacing="0">
    <tr>
      <td width="161" align="right">请输入奇素数 A（101
以上）：</td>
      <td width="319"><input name="a" type="text" id="a">
</td>
    </tr>
  <tr>
      <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
           
        <input type="reset" name="Submit2" value="重置
"></td>
    </tr>
  </table>
```

```
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sieyejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数的分项表示问题</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点
击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>素数的分项表示问题求解运算
结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
```

```
var array_ai = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if(parseInt(a)<101){
    alert("对不起，输入的数必须是 101 以上的素数！");
}else{
    var flag=1;
    for(j=2;j<=((parseInt(a))/2);j++)
    {
        if(a%j==0)
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if(flag==0){
        alert("对不起，输入的数必须是 101 以上的素数！");
    }else{
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的素数 a
为：</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
n=parseInt(a/2);
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
//i=0
```

```
//var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
{//alert(array_pi[i]);
flag=1;
for(j=2;j<=(pi/2);j++)
{
      if(pi%j==0)
      {
            flag=0;
            break;
      }
}
if(flag==1)
{
      //ni=n%pi;
      //array_ni[i]=ni;
      array_pi[i]=pi;
      //array_pi2[i]=pi;
      array_ai[i]=a%pi;
      //array_pi_ni[i]=pi-ni
      //alert(array_pi[i]);
      i++;
}
}

ther=i;
```

```
for(i=0,j=array_pi[ther-1]+1;j<a-3;i++,j++){
 array_n[i]=j;
 //alert(array_n[i]);
}

for(i=0;i<array_n.length;i++)
{
 for(k=0;k<array_pi.length;k++)
 {

 if((array_n[i]%array_pi[k]==0)||(array_n[i]%array_pi[k]==arra
y_ai[k]+1)||(array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k]-1))
              {
                    array_n[i]=0;
                    break;
              }

 }
 }
 x=0;
 for(i=0;i<array_n.length;i++){
 if(array_n[i]>0)
 x++;
 //alert(array_n[i]);
 }

 document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的解的个数为：</font>" + x + "<br>");
 if(x>0){
 document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N 中求
得的解：</font><br>");
```

```
var astr=new String(a);
var thelength=astr.length;
var x11,y11,y22;
m=1;
for(i=0;i<array_n.length;i++)
{
    switch(array_n[i])
    {
        case 0: break;
        default:
            x1=array_n[i];
            y1=a-array_n[i]+1;
            y2=a-array_n[i]-1;
            x11=new String(x1);
            for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
                x11="0"+""+x11;
            }
            y11=new String(y1);
            for(var iii=y11.length;iii<thelength;iii++){
                y11="0"+""+y11;
            }
            y22=new String(y2);
            for(var iii=y22.length;iii<thelength;iii++){
                y22="0"+""+y22;
            }
            document.write("<font
size='4'>x</font>="+x11+"  <font  size='4'>y</font>1="+y11+"<font
size='4'>y</font>2="+y22+";     ");
            if(m%2==0)
            {
              document.write("<br>");
```

```
            }
            m=m+1;
        }

    }
    }

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
}}
</script>
</p></body>
</html>
```

5.3 实筛数据

输入的素数 a 为：101

从集合 N 中求得的解的个数为：6

从集合 N 中求得的解：

x=029 $y1$=073 $y2$=071　x=041 $y1$=061 $y2$=059
x=059 $y1$=043 $y2$=041　x=071 $y1$=031 $y2$=029
x=083 $y1$=019 $y2$=017　x=089 $y1$=013 $y2$=011

输入的素数 a 为：9929

从集合 N 中求得的解的个数为：74

从集合 N 中求得的解：

x=0251 $y1$=9679 $y2$=9677　x=0467 $y1$=9463 $y2$=9461
x=0491 $y1$=9439 $y2$=9437　x=0509 $y1$=9421 $y2$=9419
x=0587 $y1$=9343 $y2$=9341　x=0647 $y1$=9283 $y2$=9281
x=0887 $y1$=9043 $y2$=9041　x=0929 $y1$=9001 $y2$=8999

x=1091 y1=8839 y2=8837　x=1109 y1=8821 y2=8819
x=1301 y1=8629 y2=8627　x=1499 y1=8431 y2=8429
x=1637 y1=8293 y2=8291　x=1697 y1=8233 y2=8231
x=1709 y1=8221 y2=8219　x=1979 y1=7951 y2=7949
x=2339 y1=7591 y2=7589　x=2381 y1=7549 y2=7547
x=2441 y1=7489 y2=7487　x=2579 y1=7351 y2=7349
x=2621 y1=7309 y2=7307　x=2801 y1=7129 y2=7127
x=2969 y1=6961 y2=6959　x=3137 y1=6793 y2=6791
x=3167 y1=6763 y2=6761　x=3359 y1=6571 y2=6569
x=3659 y1=6271 y2=6269　x=3797 y1=6133 y2=6131
x=4049 y1=5881 y2=5879　x=4079 y1=5851 y2=5849
x=4271 y1=5659 y2=5657　x=4289 y1=5641 y2=5639
x=4409 y1=5521 y2=5519　x=4451 y1=5479 y2=5477
x=4649 y1=5281 y2=5279　x=4919 y1=5011 y2=5009
x=5279 y1=4651 y2=4649　x=5381 y1=4549 y2=4547
x=5507 y1=4423 y2=4421　x=5591 y1=4339 y2=4337
x=5657 y1=4273 y2=4271　x=5669 y1=4261 y2=4259
x=5711 y1=4219 y2=4217　x=5801 y1=4129 y2=4127
x=5879 y1=4051 y2=4049　x=5927 y1=4003 y2=4001
x=6011 y1=3919 y2=3917　x=6257 y1=3673 y2=3671
x=6389 y1=3541 y2=3539　x=6569 y1=3361 y2=3359
x=6599 y1=3331 y2=3329　x=6761 y1=3169 y2=3167
x=6959 y1=2971 y2=2969　x=7127 y1=2803 y2=2801
x=7547 y1=2383 y2=2381　x=7589 y1=2341 y2=2339
x=7691 y1=2239 y2=2237　x=7817 y1=2113 y2=2111
x=7841 y1=2089 y2=2087　x=7901 y1=2029 y2=2027
x=8231 y1=1699 y2=1697　x=8447 y1=1483 y2=1481
x=8501 y1=1429 y2=1427　x=8609 y1=1321 y2=1319
x=8627 y1=1303 y2=1301　x=8699 y1=1231 y2=1229
x=8837 y1=1093 y2=1091　x=8867 y1=1063 y2=1061
x=9311 y1=0619 y2=0617　x=9467 y1=0463 y2=0461

x=9497 $y1$=0433 $y2$=0431　x=9689 $y1$=0241 $y2$=0239
x=9749 $y1$=0181 $y2$=0179　x=9791 $y1$=0139 $y2$=0137

输入的素数 a 为：31153
从集合 N 中求得的解的个数为：136
从集合 N 中求得的解：
x=00283 $y1$=30871 $y2$=30869　x=00313 $y1$=30841 $y2$=30839
x=00661 $y1$=30493 $y2$=30491　x=00883 $y1$=30271 $y2$=30269
x=01063 $y1$=30091 $y2$=30089　x=01483 $y1$=29671 $y2$=29669
x=01753 $y1$=29401 $y2$=29399　x=02131 $y1$=29023 $y2$=29021
x=02803 $y1$=28351 $y2$=28349　x=02971 $y1$=28183 $y2$=28181
x=03361 $y1$=27793 $y2$=27791　x=03463 $y1$=27691 $y2$=27689
x=03571 $y1$=27583 $y2$=27581　x=03613 $y1$=27541 $y2$=27539
x=03673 $y1$=27481 $y2$=27479　x=04093 $y1$=27061 $y2$=27059
x=04201 $y1$=26953 $y2$=26951　x=04261 $y1$=26893 $y2$=26891
x=04273 $y1$=26881 $y2$=26879　x=04423 $y1$=26731 $y2$=26729
x=04441 $y1$=26713 $y2$=26711　x=04903 $y1$=26251 $y2$=26249
x=05683 $y1$=25471 $y2$=25469　x=05743 $y1$=25411 $y2$=25409
x=05851 $y1$=25303 $y2$=25301　x=06121 $y1$=25033 $y2$=25031
x=06733 $y1$=24421 $y2$=24419　x=06781 $y1$=24373 $y2$=24371
x=07243 $y1$=23911 $y2$=23909　x=07321 $y1$=23833 $y2$=23831
x=07411 $y1$=23743 $y2$=23741　x=07591 $y1$=23563 $y2$=23561
x=07951 $y1$=23203 $y2$=23201　x=08191 $y1$=22963 $y2$=22961
x=08293 $y1$=22861 $y2$=22859　x=08581 $y1$=22573 $y2$=22571
x=09043 $y1$=22111 $y2$=22109　x=09631 $y1$=21523 $y2$=21521
x=09661 $y1$=21493 $y2$=21491　x=10093 $y1$=21061 $y2$=21059
x=10141 $y1$=21013 $y2$=21011　x=10513 $y1$=20641 $y2$=20639
x=10711 $y1$=20443 $y2$=20441　x=11131 $y1$=20023 $y2$=20021
x=11161 $y1$=19993 $y2$=19991　x=11311 $y1$=19843 $y2$=19841
x=11731 $y1$=19423 $y2$=19421　x=11941 $y1$=19213 $y2$=19211
x=11971 $y1$=19183 $y2$=19181　x=12073 $y1$=19081 $y2$=19079

x=12241 y1=18913 y2=18911　x=12613 y1=18541 y2=18539
x=12841 y1=18313 y2=18311　x=13033 y1=18121 y2=18119
x=13093 y1=18061 y2=18059　x=13963 y1=17191 y2=17189
x=14173 y1=16981 y2=16979　x=14251 y1=16903 y2=16901
x=14323 y1=16831 y2=16829　x=14461 y1=16693 y2=16691
x=14503 y1=16651 y2=16649　x=14923 y1=16231 y2=16229
x=15013 y1=16141 y2=16139　x=15091 y1=16063 y2=16061
x=15511 y1=15643 y2=15641　x=15823 y1=15331 y2=15329
x=16561 y1=14593 y2=14591　x=16603 y1=14551 y2=14549
x=16831 y1=14323 y2=14321　x=16903 y1=14251 y2=14249
x=17431 y1=13723 y2=13721　x=17443 y1=13711 y2=13709
x=18541 y1=12613 y2=12611　x=18913 y1=12241 y2=12239
x=19081 y1=12073 y2=12071　x=19183 y1=11971 y2=11969
x=19213 y1=11941 y2=11939　x=19603 y1=11551 y2=11549
x=19801 y1=11353 y2=11351　x=19993 y1=11161 y2=11159
x=20443 y1=10711 y2=10709　x=21013 y1=10141 y2=10139
x=21061 y1=10093 y2=10091　x=21433 y1=09721 y2=09719
x=21523 y1=09631 y2=09629　x=21871 y1=09283 y2=09281
x=22111 y1=09043 y2=09041　x=22153 y1=09001 y2=08999
x=22291 y1=08863 y2=08861　x=22861 y1=08293 y2=08291
x=22921 y1=08233 y2=08231　x=23143 y1=08011 y2=08009
x=23203 y1=07951 y2=07949　x=23563 y1=07591 y2=07589
x=23593 y1=07561 y2=07559　x=24373 y1=06781 y2=06779
x=24391 y1=06763 y2=06761　x=24793 y1=06361 y2=06359
x=25303 y1=05851 y2=05849　x=25411 y1=05743 y2=05741
x=25633 y1=05521 y2=05519　x=25873 y1=05281 y2=05279
x=26053 y1=05101 y2=05099　x=26431 y1=04723 y2=04721
x=26731 y1=04423 y2=04421　x=26881 y1=04273 y2=04271
x=26893 y1=04261 y2=04259　x=27061 y1=04093 y2=04091
x=27103 y1=04051 y2=04049　x=27481 y1=03673 y2=03671
x=27691 y1=03463 y2=03461　x=27763 y1=03391 y2=03389

x=27793 $y1$=03361 $y2$=03359 x=27823 $y1$=03331 $y2$=03329
x=27901 $y1$=03253 $y2$=03251 x=28183 $y1$=02971 $y2$=02969
x=28351 $y1$=02803 $y2$=02801 x=28603 $y1$=02551 $y2$=02549
x=28771 $y1$=02383 $y2$=02381 x=28813 $y1$=02341 $y2$=02339
x=28843 $y1$=02311 $y2$=02309 x=29023 $y1$=02131 $y2$=02129
x=29221 $y1$=01933 $y2$=01931 x=29671 $y1$=01483 $y2$=01481
x=29833 $y1$=01321 $y2$=01319 x=29851 $y1$=01303 $y2$=01301
x=29863 $y1$=01291 $y2$=01289 x=30091 $y1$=01063 $y2$=01061
x=30103 $y1$=01051 $y2$=01049 x=30133 $y1$=01021 $y2$=01019
x=30271 $y1$=00883 $y2$=00881 x=30493 $y1$=00661 $y2$=00659
x=30553 $y1$=00601 $y2$=00599 x=30631 $y1$=00523 $y2$=00521
x=30841 $y1$=00313 $y2$=00311 x=30871 $y1$=00283 $y2$=00281

第六章　孪生素数

“孪生素数猜想”猜想孪生素数有无限多对。“孪生素数猜想”与“哥德巴赫猜想”和“黎曼猜想”同属希尔伯特（Hilbert）第八问题。长期以来广受观注，但还未得到公认解决。现探讨如下。

6.1　求解证明

设 A 为大于 10000 的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。则集合 E 的基数 $|E|$ 等于 A

$$|E| = A \tag{1}$$

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leqslant A^{1/2} \tag{2}$$

用筛选方法从集合 E 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{3}$$

$$g \neq 2 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{4}$$

g 表示集合 E 中被选元素。

从集合 E 中将同时符合（3），（4）式的元素分选出来，组成子集 E_B，再来讨论子集 E_B 的基数 $|E_B|$（筛函数）。

6.1.1　求证筛函数的下界

集合 E 为自然数列集合，集合 P 中的元素为互不相同的素

数。根据第一章的公式（61）式可知，基数$|E_B|$的近似估算式为：

$$|E_B| = A\prod_{i=1}^{r}(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{5}$$

根据第一章的公式（72）式可知，基数$|E_B|$的下界表达式为：

$$|E_B| > A\prod_{i=1}^{r}(\frac{A-p_i}{A})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{6}$$

式中α_i为根据筛选条件所选取的模p_i的同余类子集的个数，下面根据筛选条件（3），（4）式来讨论α_i的具体数值。

当$i=1$时，　　$p_1=2$　故知

$$0 \equiv 2 \pmod{p_1}$$

所以，此时（3）式与（4）式等同，可合为一个条件。据此，由（3）式可知，集合E中只有模p_1的“1 同余类子集”符合筛选条件，应被选取，由此得出

$$\alpha_1 = 1 \tag{7}$$

当$i>1$时，（3），（4）式为两个不同的条件，由该两个不同的筛选条件决定了模p_i的“0 同余类子集”和“2 同余类子集”都不符合条件，应当筛掉，被选取的是其余(p_i-2)个模p_i的同余类子集，由此得出

$$\alpha_i = p_i - 2 \qquad (i>1) \tag{8}$$

将（7），（8）代入（5）式得

$$|E_B| = (\frac{A}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{9}$$

将（7），（8）代入（6）式得

$$|E_B| > F_1(\frac{A}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{10}$$

$$F_1=\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{A})>1-(\frac{1}{A})\sum_{i=1}^{r}p_i \tag{11}$$

由第一章（77）式可以推得

$$\Pi(x)-\Pi(\frac{x}{2})<\Pi(\frac{x}{2}) \tag{12}$$

由（12）式知，数值越大的区域，素数分布的密度越小，由此可得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i<(\frac{1}{2})(p_1+p_r)\Pi(p_r) \tag{13}$$

由第一章（82）式可得

$$\Pi(p_r)<6\ln 2(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{14}$$

即有 $$\sum_{i=1}^{r}p_i<3\ln 2(p_1+p_r)\frac{p_r}{\ln p_r} \tag{15}$$

（15）代入（11）式，再代入（10）式得

$$|E_B|>(\frac{A}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i})-\{\frac{3\ln 2(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{16}$$

将 A/2 作以下变换：

$$A/2=(A/2)\{p_2/(p_3-2)\} \tag{17}$$

$$A/2=(A/2)\{p_3/(p_4-2)\} \tag{18}$$

$$A/2=(A/2)\{p_4/(p_5-2)\}+A/(p_5-2) \tag{19}$$

$$A/2=(A/2)\{p_5/(p_6-2)\} \tag{20}$$

$$A/2=(A/2)\{p_6/(p_7-2)\}+A/(p_7-2) \tag{21}$$

$$A/2=(A/2)\{p_7/(p_8-2)\} \tag{22}$$

$$A/2=(A/2)\{p_8/(p_9-2)\}+A/(p_9-2) \tag{23}$$

$$A/2=(A/2)\{p_9/(p_{10}-2)\}+2A/(p_{10}-2) \tag{24}$$

$$A/2=(A/2)\{p_{10}/(p_{11}-2)\} \quad (25)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{11}/(p_{12}-2)\}+2A/(p_{12}-2) \quad (26)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{12}/(p_{13}-2)\}+A/(p_{13}-2) \quad (27)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{13}/(p_{14}-2)\} \quad (28)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{14}/(p_{15}-2)\}+A/(p_{15}-2) \quad (29)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{15}/(p_{16}-2)\}+2A/(p_{16}-2) \quad (30)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{16}/(p_{17}-2)\}+2A/(p_{17}-2) \quad (31)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{17}/(p_{18}-2)\} \quad (32)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{18}/(p_{19}-2)\}+2A/(p_{19}-2) \quad (33)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{19}/(p_{20}-2)\}+A/(p_{20}-2) \quad (34)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{20}/(p_{21}-2)\} \quad (35)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{21}/(p_{22}-2)\}+2A/(p_{22}-2) \quad (36)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{22}/(p_{23}-2)\}+A/(p_{23}-2) \quad (37)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{23}/(p_{24}-2)\}+2A/(p_{24}-2) \quad (38)$$

$$A/2=(A/2)\{p_{24}/(p_{25}-2)\}+3A/(p_{25}-2) \quad (39)$$

将（17），（18），……，（39）式逐次代入，可得

$$A/2=\frac{A}{2}\prod_{i=3}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+F_2 \quad (40)$$

$$F_2=(\frac{A}{p_5-2})\prod_{i=6}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{A}{p_7-2})\prod_{i=8}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{A}{p_9-2})\prod_{i=10}^{25}\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\}+(\frac{2A}{p_{10}-2})\prod_{i=11}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2A}{p_{12}-2})\prod_{i=13}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{A}{p_{13}-2})\prod_{i=14}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{A}{p_{15}-2})\prod_{i=16}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2A}{p_{16}-2})\prod_{i=17}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2A}{p_{17}-2})\prod_{i=18}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2A}{p_{19}-2})\prod_{i=20}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{A}{p_{20}-2})\prod_{i=21}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2A}{p_{22}-2})\prod_{i=23}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{A}{p_{23}-2})\prod_{i=24}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2A}{p_{24}-2})(\frac{p_{24}}{p_{25}-2})+(\frac{3A}{p_{25}-2}) \quad (41)$$

将 $p_5=11$， $p_6=13$， $p_7=17$， $p_8=19$， $p_9=23$， $p_{10}=29$， $p_{11}=31$， $p_{12}=37$， $p_{13}=41$， $p_{14}=43$， $p_{15}=47$， $p_{16}=53$， $p_{17}=59$， $p_{18}=61$， $p_{19}=67$， $p_{20}=71$， $p_{21}=73$， $p_{22}=79$， $p_{23}=83$， $p_{24}=89$， $p_{25}=97$ 代入（41）式得

$$F_2=0.3654A \quad (42)$$

将（42）代入（40）式，得

$$A/2=(\frac{A}{2})\prod_{i=3}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+0.3654A \quad (43)$$

将（43）代入（16）式得

$$|E_B|>(\frac{A}{2})\prod_{j=3}^{25}\{\frac{p_{j-1}}{p_j-2}\}\prod_{i=2}^{r}\{\frac{p_i-2}{p_i}\}+$$

$$\{0.3654A-\frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{r}\{\frac{p_i-2}{p_i}\} \quad (44)$$

由（2）式知　　$A \geqslant p_r{}^2$　　（45）

由（44）和（45）式得

$$|E_B|>(\frac{A}{2})\prod_{j=3}^{25}(\frac{p_{j-1}}{p_j-2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i})+F_3 \quad (46)$$

$$F_3=\{0.3654p_r-\frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)}{2\ln p_r}\}p_r\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{47}$$

令 $$F_4=0.3654p_r-\frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)}{2\ln p_r} \tag{48}$$

则 $$F_3=F_4p_r\prod_{i=2}^{r}\{\frac{p_i-2}{p_i}\} \tag{49}$$

$$\frac{dF_4}{dp_r}=0.3654-(\frac{3\ln 2}{2})\{\frac{\ln p_r-(p_1+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\}=$$

$$0.3654-\frac{3\ln 2}{2\ln p_r}+\frac{(3\ln 2)(p_1+p_r)}{2p_r\ln^2 p_r}>0.3654-\frac{3\ln 2}{2\ln p_r} \tag{50}$$

命 $$0.3654-\frac{3\ln 2}{2\ln p_r}>0$$

得 $$p_r>e^{2.8454}=17.21 \tag{51}$$

将条件（51）式代入（50）式得

$$\frac{dF_4}{dp_r}>0 \qquad (p_r>17.21) \tag{52}$$

（52）式表明当 $p_r>17.21$ 时，F_4 为 p_r 的增值函数。

当 $A\geqslant 10000$ 时， $p_r\geqslant 97>17.21$。

将 $p_r=97$ 代入（48）式得

$$F_4(p_r=97)=12.9>1 \qquad (p_r=97) \tag{53}$$

故知 $$F_4>1 \qquad (A\geqslant 10000) \tag{54}$$

将（54）式代入（49）式得

$$F_3>p_r\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i})=\frac{p_r}{3}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{55}$$

已知 $$p_i-2\geqslant p_{i-1} \qquad (i\geqslant 3) \tag{56}$$

（56）式代入（55）式得

$$F_3 > \frac{p_r}{3}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_{i-1}}{p_i}) = 1 \tag{57}$$

（57）式代入（46）式得

$$|E_B| > (\frac{A}{2})(\frac{1}{3})\prod_{j=3}^{25}(\frac{p_{j-1}}{p_j - 2})\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 2}{p_i}) + 1 \tag{58}$$

由（56）式和（58）式知

$$|E_B| > (\frac{A}{6})\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_{i-1}}{p_i}) + 1 = (\frac{A}{6})(\frac{3}{p_r}) + 1 \tag{59}$$

将（45）式代入（59）式，得

$$|E_B| > (\frac{p_r}{2}) + 1 \tag{60}$$

将集合 E_B 中的元素 1 扣除掉，根据（60）式可知，集合 E_B 中不为 1 的元素个数应是，

$$|E_B| - 1 > \frac{p_r}{2} \tag{61}$$

6.1.2　通过子集 E_B 求解

从集合 E_B 中任取一个数值不为 1 的元素 x，则

$$x \in E\ , \qquad x > 1 \tag{62}$$

再引入参量 y

$$y = x - 2 \tag{63}$$

显然　$y \in E$，　　$y > 1$　　　（64）

以集合 P 中各元素为模数。求得同余式组：

$$x \equiv x_i \pmod{p_i}\ , \qquad i = 1,2,\dots,r \tag{65}$$

$$y \equiv y_i \pmod{p_i}\ , \qquad i = 1,2,\dots,r \tag{66}$$

由于 $x \in E_B$，根据筛选条件（3）式可知

$$x_i \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{67}$$

根据筛选条件（4）式可知

$$x_i \neq 2, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{68}$$

依据同余式的性质，由（63）式推得

$$y_i \equiv x_i - 2 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{69}$$

由（68）式和（69）式可知

$$y_i \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{70}$$

根据第一章中引理3，由（62）式和（67）式可知，x 为奇素数。
根据第一章中引理3，由（64）式和（70）式可知，y 为奇素数。
由（63）式移项可得

$$x - y = 2 \tag{71}$$

由（71）式可见，(x,y)为一对孪生素数。

x 为集合 E_B 中随意一个数值不为1的元素，由（61）式知，集合 E_B 中数值不为1的元素个数不少于$(p_r/2)$个，据此推得。

孪生素数分布定律：不超过正整数 A（$A \geqslant 10000$）的孪生素数不少于$(p_r/2)$对，（p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数)。

6.2 孪生素数的无限性

由（67）式和（70）式可知

$$x > p_r \tag{72}$$

$$y > p_r \tag{73}$$

根据定义，p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数，所以大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$。由于 x 和 y 都是素数，故知：

$$x > A^{1/2} \tag{74}$$

$$y > A^{1/2} \tag{75}$$

由（74）式和（75）式可见，集合 E_B 中不为 1 的元素所对应的孪生素数（x，y）应在区间（$A^{1/2}$，A）之内。即，在区间（$A^{1/2}$，A）之内，孪生素数不少于（$p_r/2$）对。

若以 A^2 取代 A，则知，区间（A，A^2）内也有不少于（$p_r/2$）对的孪生素数，因为不超过 A 的最大素数必然大于不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数。再以 A^4 取代 A^2……，依次类推，当 A 的指数趋于无穷大时，孪生素数必有无限多对。

6.3　孪生素数的补充解

上述通过集合 E_B 求得的孪生素数，并非集合 E 中所含全部孪生素数。其全部孪生素数还应包括下述部分。

一、令 $p_{r+1} = p_r + 2$　（76）

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$p_{r+1} \equiv (p_{r+1})_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{77}$$

$(p_{r+1})_i$ 为非负的最小剩余。

由（76）式知

$$p_{r+1} \in E, \qquad p_{r+1} > 1 \tag{78}$$

假若 $(p_{r+1})_i \neq 0$，　$i = 1,2,\ldots,r$　（79）

根据第一章引理 3，由（78）式和（79）式可知：p_{r+1} 为奇素数。

将（76）式移项可得：

$$p_{r+1} - p_r = 2 \tag{80}$$

可见，(p_r, p_{r+1}) 为一对孪生素数。

二、用筛选方法从集合 P 中分选出必要的子集

给定筛选条件：

$$p_i - p_{i-1} = 2\,, \qquad i = 3,4,\dots,r \tag{81}$$

p_i和$p_{i\text{-}1}$皆为集合P中被选元素。

从集合 P 中，将符合（81）式条件的素数对分选出来组成子集P_B。根据筛选条件，显然集合P_B中所有的素数对皆为孪生素数。

6.4 求解程序

下面给出用 ASP 写的求解程序，分为输入界面和求解显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta      http-equiv="Content-Type"      content="text/html;
charset=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno()（
    var a=form1.a.value;
    if(a==""||a==null)（
        alert("请输入一个数字（10000 以上）！");
        return;
    ）else if(parseInt(a)<10000)（
        alert("输入的数字必须大于 10000！");
        return;
    ）form1.submit();
）
</script>
```

```
</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
孪生素数猜想求解程序</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
<table width="500" border="0" align="center" cellpadding="5"
cellspacing="0">
    <tr>
      <td width="161" align="right">请输入一个数字
（10000 以上）：</td>
      <td width="319"><input name="a" type="text" id="a"> </td>
    </tr>
  <tr>
      <td align="center" colspan="2"><input type="button" name
="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
           
       <input type="reset" name="Submit2" value="重置
"></td>
    </tr>
  </table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
```

```
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size
="4"><strong>如果出现提示“……是否取消该脚本？”，请点击
“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>孪生素数猜想求解运算结果
</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_a = new Array();
//var array_ai = new Array();
var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<5)
  (
```

```
    document.write("输入错误！");
  ）else（
  document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a
为：</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
  //n=parseInt(a/2);
  //alert(n);
  pr=Math.sqrt(a);
  pr=parseInt(pr);
  //i=0
  var i1=1;
  //var i2=1;
  ther=0;
  i=0
  //alert(pr);
  for(pi=2;pi<=pr;pi++)
   (//alert(array_pi[i]);
       flag=1;
       for(j=2;j<=(pi/2);j++)
        (
            if(pi%j==0)
             (
                 flag=0;
                 break;
            )
       )
       if(flag==1)
        (
           //ni=n%pi;
           //array_ni[i]=ni;
           array_pi[i]=pi;
```

```
            //array_pi2[i]=pi;
            //array_ai[i]=a%pi;
            //array_pi_ni[i]=pi-ni
            //alert(array_pi[i]);
            i++;
        )
)

ther=i;


for(i=0;i<a-3;i++) (
    array_a[i]=i+4;
    //alert(array_n[i]);
)

for(i=0;i<a-3;i++)
 (
 for(k=0;k<array_pi.length;k++)
  (
    if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==2))
           (
                array_a[i]=0;
                break;
           )


  )
)
x=0;
```

```
for(i=0;i<a-3;i++)（
  if(array_a[i]>0)
  x++;
  //alert(array_n[i]);
）
var xx=0
for(i=1;i<array_pi.length;i++)（
  if(array_pi[i]-array_pi[i-1]==2)（
      array_hi[xx]=array_pi[i];
      xx++;
  ）
  ）


  var thepr2=array_pi[array_pi.length-1]+2;
  var thepr2flag=1;
  for(i=0;i<array_pi.length;i++)（
    if(thepr2%array_pi[i]==0)（
        thepr2flag=0;
        break;
    ）
  ）if(thepr2flag==1)（
    array_hi[xx]=thepr2;
    xx++;
  ）


  if(xx>0)（
  document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合
```

```
P 中求得的孪生素数的对数为：</font>" + xx + "<br>");
        document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 P 中
求得的孪生素数对：</font><br>");
        var astr=new String(a);
        var thelength=astr.length;
        var x11,y11;
        m=1;
        for(i=0;i<array_hi.length;i++)
         (
                        x1=array_hi[i];
                        y1=array_hi[i]-2;
                        x11=new String(x1);
                        for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) (
                              x11="0"+""+x11;
                        )
                        y11=new String(y1);
                        for(var iii=y11.length;iii<thelength;iii++) (
                               y11="0"+""+y11;
                        )
                        document.write("<font
size='4'>x</font>="+y11+"                                    <font
size='4'>y</font>="+x11+"    ");
                         if(m%6==0)
                          (
                           document.write("<br>");

                         )
                          m=m+1;

          )
```

```
    )
    document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 A
中求得的孪生素数的对数为：</font>" + x + "<br>");
    if(x>0) (
        document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 A
中求得的孪生素数对：</font><br>");
        var astr=new String(a);
        var thelength=astr.length;
        var x11,y11;
        m=1;
        for(i=0;i<a-3;i++)
         (
            switch(array_a[i])
             (
                case 0: break;
                default:
                    x1=array_a[i];
                    y1=array_a[i]-2;
                    x11=new String(x1);
                    for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) (
                            x11="0"+""+x11;
                    )
                    y11=new String(y1);
                    for(var iii=y11.length;iii<thelength;iii++) (
                            y11="0"+""+y11;
                    )
                    document.write("<font
size='4'>x</font>="+y11+"  <font  size='4'>y</font>="+x11+" 
   ");
                    if(m%6==0)
```

```
                        (
                          document.write("<br>");

                        )
                        m=m+1;
                )

        )
    )

    document.all("wait_div").style.display="none";
    document.all("wait2_div").style.display="";
    )
    </script>
    </p></body>
    </html>
```

6.5 实筛数据

输入的数 a 为：1000

从集合 P 中求得的孪生素数的对数为：5

从集合 P 中求得的孪生素数对：

x=0003 y=0005 x=0005 y=0007 x=0011 y=0013

x=0017 y=0019 x=0029 y=0031

从集合 A 中求得的孪生素数的对数为：30

从集合 A 中求得的孪生素数对：

x=0041 y=0043 x=0059 y=0061 x=0071 y=0073

x=0101 y=0103 x=0107 y=0109 x=0137 y=0139

x=0149 y=0151 x=0179 y=0181 x=0191 y=0193

x=0197 y=0199 x=0227 y=0229 x=0239 y=0241

x=0269 y=0271　x=0281 y=0283　x=0311 y=0313
x=0347 y=0349　x=0419 y=0421　x=0431 y=0433
x=0461 y=0463　x=0521 y=0523　x=0569 y=0571
x=0599 y=0601　x=0617 y=0619　x=0641 y=0643
x=0659 y=0661　x=0809 y=0811　x=0821 y=0823
x=0827 y=0829　x=0857 y=0859　x=0881 y=0883

输入的数 a 为：100000

从集合 P 中求得的孪生素数的对数为：20
从集合 P 中求得的孪生素数对：
x=000003 y=000005　x=000005 y=000007　x=000011 y=000013
x=000017 y=000019　x=000029 y=000031　x=000041 y=000043
x=000059 y=000061　x=000071 y=000073　x=000101 y=000103
x=000107 y=000109　x=000137 y=000139　x=000149 y=000151
x=000179 y=000181　x=000191 y=000193　x=000197 y=000199
x=000227 y=000229　x=000239 y=000241　x=000269 y=000271
x=000281 y=000283　x=000311 y=000313
从集合 A 中求得的孪生素数的对数为：1204
从集合 A 中求得的孪生素数对：
x=000347 y=000349　x=000419 y=000421　x=000431 y=000433
x=000461 y=000463　x=000521 y=000523　x=000569 y=000571
x=000599 y=000601　x=000617 y=000619　x=000641 y=000643
x=000659 y=000661　x=000809 y=000811　x=000821 y=000823
x=000827 y=000829　x=000857 y=000859　x=000881 y=000883
x=001019 y=001021　x=001031 y=001033　x=001049 y=001051
x=001061 y=001063　x=001091 y=001093　x=001151 y=001153
x=001229 y=001231　x=001277 y=001279　x=001289 y=001291
x=001301 y=001303　x=001319 y=001321　x=001427 y=001429
x=001451 y=001453　x=001481 y=001483　x=001487 y=001489

x=001607 y=001609 x=001619 y=001621 x=001667 y=001669
x=001697 y=001699 x=001721 y=001723 x=001787 y=001789
x=001871 y=001873 x=001877 y=001879 x=001931 y=001933
x=001949 y=001951 x=001997 y=001999 x=002027 y=002029
x=002081 y=002083 x=002087 y=002089 x=002111 y=002113
x=002129 y=002131 x=002141 y=002143 x=002237 y=002239
x=002267 y=002269 x=002309 y=002311 x=002339 y=002341
x=002381 y=002383 x=002549 y=002551 x=002591 y=002593
x=002657 y=002659 x=002687 y=002689 x=002711 y=002713
x=002729 y=002731 x=002789 y=002791 x=002801 y=002803
x=002969 y=002971 x=002999 y=003001 x=003119 y=003121
x=003167 y=003169 x=003251 y=003253 x=003257 y=003259
x=003299 y=003301 x=003329 y=003331 x=003359 y=003361
x=003371 y=003373 x=003389 y=003391 x=003461 y=003463
x=003467 y=003469 x=003527 y=003529 x=003539 y=003541
x=003557 y=003559 x=003581 y=003583 x=003671 y=003673
x=003767 y=003769 x=003821 y=003823 x=003851 y=003853
x=003917 y=003919 x=003929 y=003931 x=004001 y=004003
x=004019 y=004021 x=004049 y=004051 x=004091 y=004093
x=004127 y=004129 x=004157 y=004159 x=004217 y=004219
x=004229 y=004231 x=004241 y=004243 x=004259 y=004261
x=004271 y=004273 x=004337 y=004339 x=004421 y=004423
x=004481 y=004483 x=004517 y=004519 x=004547 y=004549
x=004637 y=004639 x=004649 y=004651 x=004721 y=004723
x=004787 y=004789 x=004799 y=004801 x=004931 y=004933
x=004967 y=004969 x=005009 y=005011 x=005021 y=005023
x=005099 y=005101 x=005231 y=005233 x=005279 y=005281
x=005417 y=005419 x=005441 y=005443 x=005477 y=005479
x=005501 y=005503 x=005519 y=005521 x=005639 y=005641
x=005651 y=005653 x=005657 y=005659 x=005741 y=005743
x=005849 y=005851 x=005867 y=005869 x=005879 y=005881

$x=006089$ $y=006091$　$x=006131$ $y=006133$　$x=006197$ $y=006199$
$x=006269$ $y=006271$　$x=006299$ $y=006301$　$x=006359$ $y=006361$
$x=006449$ $y=006451$　$x=006551$ $y=006553$　$x=006569$ $y=006571$
$x=006659$ $y=006661$　$x=006689$ $y=006691$　$x=006701$ $y=006703$
$x=006761$ $y=006763$　$x=006779$ $y=006781$　$x=006791$ $y=006793$
$x=006827$ $y=006829$　$x=006869$ $y=006871$　$x=006947$ $y=006949$
$x=006959$ $y=006961$　$x=007127$ $y=007129$　$x=007211$ $y=007213$
$x=007307$ $y=007309$　$x=007331$ $y=007333$　$x=007349$ $y=007351$
$x=007457$ $y=007459$　$x=007487$ $y=007489$　$x=007547$ $y=007549$
$x=007559$ $y=007561$　$x=007589$ $y=007591$　$x=007757$ $y=007759$
$x=007877$ $y=007879$　$x=007949$ $y=007951$　$x=008009$ $y=008011$
$x=008087$ $y=008089$　$x=008219$ $y=008221$　$x=008231$ $y=008233$
$x=008291$ $y=008293$　$x=008387$ $y=008389$　$x=008429$ $y=008431$
$x=008537$ $y=008539$　$x=008597$ $y=008599$　$x=008627$ $y=008629$
$x=008819$ $y=008821$　$x=008837$ $y=008839$　$x=008861$ $y=008863$
$x=008969$ $y=008971$　$x=008999$ $y=009001$　$x=009011$ $y=009013$
$x=009041$ $y=009043$　$x=009239$ $y=009241$　$x=009281$ $y=009283$
$x=009341$ $y=009343$　$x=009419$ $y=009421$　$x=009431$ $y=009433$
$x=009437$ $y=009439$　$x=009461$ $y=009463$　$x=009629$ $y=009631$
$x=009677$ $y=009679$　$x=009719$ $y=009721$　$x=009767$ $y=009769$
$x=009857$ $y=009859$　$x=009929$ $y=009931$　$x=010007$ $y=010009$
$x=010037$ $y=010039$　$x=010067$ $y=010069$　$x=010091$ $y=010093$
$x=010139$ $y=010141$　$x=010271$ $y=010273$　$x=010301$ $y=010303$
$x=010331$ $y=010333$　$x=010427$ $y=010429$　$x=010457$ $y=010459$
$x=010499$ $y=010501$　$x=010529$ $y=010531$　$x=010709$ $y=010711$
$x=010859$ $y=010861$　$x=010889$ $y=010891$　$x=010937$ $y=010939$
$x=011057$ $y=011059$　$x=011069$ $y=011071$　$x=011117$ $y=011119$
$x=011159$ $y=011161$　$x=011171$ $y=011173$　$x=011351$ $y=011353$
$x=011489$ $y=011491$　$x=011549$ $y=011551$　$x=011699$ $y=011701$
$x=011717$ $y=011719$　$x=011777$ $y=011779$　$x=011831$ $y=011833$
$x=011939$ $y=011941$　$x=011969$ $y=011971$　$x=012041$ $y=012043$

x=012071 y=012073 x=012107 y=012109 x=012161 y=012163
x=012239 y=012241 x=012251 y=012253 x=012377 y=012379
x=012539 y=012541 x=012611 y=012613 x=012821 y=012823
x=012917 y=012919 x=013001 y=013003 x=013007 y=013009
x=013217 y=013219 x=013337 y=013339 x=013397 y=013399
x=013679 y=013681 x=013691 y=013693 x=013709 y=013711
x=013721 y=013723 x=013757 y=013759 x=013829 y=013831
x=013877 y=013879 x=013901 y=013903 x=013931 y=013933
x=013997 y=013999 x=014009 y=014011 x=014081 y=014083
x=014249 y=014251 x=014321 y=014323 x=014387 y=014389
x=014447 y=014449 x=014549 y=014551 x=014561 y=014563
x=014591 y=014593 x=014627 y=014629 x=014867 y=014869
x=015137 y=015139 x=015269 y=015271 x=015287 y=015289
x=015329 y=015331 x=015359 y=015361 x=015581 y=015583
x=015641 y=015643 x=015647 y=015649 x=015731 y=015733
x=015737 y=015739 x=015887 y=015889 x=015971 y=015973
x=016061 y=016063 x=016067 y=016069 x=016139 y=016141
x=016187 y=016189 x=016229 y=016231 x=016361 y=016363
x=016451 y=016453 x=016631 y=016633 x=016649 y=016651
x=016691 y=016693 x=016829 y=016831 x=016901 y=016903
x=016979 y=016981 x=017027 y=017029 x=017189 y=017191
x=017207 y=017209 x=017291 y=017293 x=017387 y=017389
x=017417 y=017419 x=017489 y=017491 x=017579 y=017581
x=017597 y=017599 x=017657 y=017659 x=017681 y=017683
x=017747 y=017749 x=017789 y=017791 x=017837 y=017839
x=017909 y=017911 x=017921 y=017923 x=017957 y=017959
x=017987 y=017989 x=018041 y=018043 x=018047 y=018049
x=018059 y=018061 x=018119 y=018121 x=018131 y=018133
x=018251 y=018253 x=018287 y=018289 x=018311 y=018313
x=018521 y=018523 x=018539 y=018541 x=018911 y=018913
x=018917 y=018919 x=019079 y=019081 x=019139 y=019141

x=019181 y=019183 x=019211 y=019213 x=019379 y=019381
x=019421 y=019423 x=019427 y=019429 x=019469 y=019471
x=019541 y=019543 x=019697 y=019699 x=019751 y=019753
x=019841 y=019843 x=019889 y=019891 x=019961 y=019963
x=019991 y=019993 x=020021 y=020023 x=020147 y=020149
x=020231 y=020233 x=020357 y=020359 x=020441 y=020443
x=020477 y=020479 x=020507 y=020509 x=020549 y=020551
x=020639 y=020641 x=020717 y=020719 x=020747 y=020749
x=020771 y=020773 x=020807 y=020809 x=020897 y=020899
x=020981 y=020983 x=021011 y=021013 x=021017 y=021019
x=021059 y=021061 x=021191 y=021193 x=021317 y=021319
x=021377 y=021379 x=021491 y=021493 x=021521 y=021523
x=021557 y=021559 x=021587 y=021589 x=021599 y=021601
x=021611 y=021613 x=021647 y=021649 x=021737 y=021739
x=021839 y=021841 x=022037 y=022039 x=022091 y=022093
x=022109 y=022111 x=022157 y=022159 x=022271 y=022273
x=022277 y=022279 x=022367 y=022369 x=022481 y=022483
x=022541 y=022543 x=022571 y=022573 x=022619 y=022621
x=022637 y=022639 x=022697 y=022699 x=022739 y=022741
x=022859 y=022861 x=022961 y=022963 x=023027 y=023029
x=023039 y=023041 x=023057 y=023059 x=023201 y=023203
x=023291 y=023293 x=023369 y=023371 x=023537 y=023539
x=023561 y=023563 x=023627 y=023629 x=023669 y=023671
x=023687 y=023689 x=023741 y=023743 x=023831 y=023833
x=023909 y=023911 x=024107 y=024109 x=024179 y=024181
x=024371 y=024373 x=024419 y=024421 x=024917 y=024919
x=024977 y=024979 x=025031 y=025033 x=025169 y=025171
x=025301 y=025303 x=025307 y=025309 x=025409 y=025411
x=025469 y=025471 x=025577 y=025579 x=025601 y=025603
x=025799 y=025801 x=025847 y=025849 x=025931 y=025933
x=025997 y=025999 x=026111 y=026113 x=026249 y=026251

x=026261 y=026263 x=026681 y=026683 x=026699 y=026701
x=026711 y=026713 x=026729 y=026731 x=026861 y=026863
x=026879 y=026881 x=026891 y=026893 x=026951 y=026953
x=027059 y=027061 x=027107 y=027109 x=027239 y=027241
x=027281 y=027283 x=027407 y=027409 x=027479 y=027481
x=027527 y=027529 x=027539 y=027541 x=027581 y=027583
x=027689 y=027691 x=027737 y=027739 x=027749 y=027751
x=027791 y=027793 x=027917 y=027919 x=027941 y=027943
x=028097 y=028099 x=028109 y=028111 x=028181 y=028183
x=028277 y=028279 x=028307 y=028309 x=028349 y=028351
x=028409 y=028411 x=028547 y=028549 x=028571 y=028573
x=028619 y=028621 x=028661 y=028663 x=028751 y=028753
x=029021 y=029023 x=029129 y=029131 x=029207 y=029209
x=029387 y=029389 x=029399 y=029401 x=029567 y=029569
x=029669 y=029671 x=029759 y=029761 x=029879 y=029881
x=030011 y=030013 x=030089 y=030091 x=030137 y=030139
x=030269 y=030271 x=030389 y=030391 x=030467 y=030469
x=030491 y=030493 x=030557 y=030559 x=030839 y=030841
x=030851 y=030853 x=030869 y=030871 x=031079 y=031081
x=031121 y=031123 x=031151 y=031153 x=031181 y=031183
x=031247 y=031249 x=031319 y=031321 x=031391 y=031393
x=031511 y=031513 x=031541 y=031543 x=031721 y=031723
x=031727 y=031729 x=031769 y=031771 x=031847 y=031849
x=032027 y=032029 x=032057 y=032059 x=032117 y=032119
x=032141 y=032143 x=032189 y=032191 x=032297 y=032299
x=032321 y=032323 x=032369 y=032371 x=032411 y=032413
x=032441 y=032443 x=032531 y=032533 x=032561 y=032563
x=032609 y=032611 x=032717 y=032719 x=032801 y=032803
x=032831 y=032833 x=032909 y=032911 x=032939 y=032941
x=032969 y=032971 x=033071 y=033073 x=033149 y=033151
x=033179 y=033181 x=033287 y=033289 x=033329 y=033331

x=033347 y=033349 x=033587 y=033589 x=033599 y=033601
x=033617 y=033619 x=033749 y=033751 x=033767 y=033769
x=033809 y=033811 x=033827 y=033829 x=034031 y=034033
x=034127 y=034129 x=034157 y=034159 x=034211 y=034213
x=034259 y=034261 x=034301 y=034303 x=034367 y=034369
x=034469 y=034471 x=034499 y=034501 x=034511 y=034513
x=034589 y=034591 x=034649 y=034651 x=034757 y=034759
x=034841 y=034843 x=034847 y=034849 x=034961 y=034963
x=035051 y=035053 x=035081 y=035083 x=035279 y=035281
x=035447 y=035449 x=035507 y=035509 x=035531 y=035533
x=035591 y=035593 x=035729 y=035731 x=035801 y=035803
x=035837 y=035839 x=035897 y=035899 x=036011 y=036013
x=036107 y=036109 x=036341 y=036343 x=036467 y=036469
x=036527 y=036529 x=036779 y=036781 x=036791 y=036793
x=036899 y=036901 x=036929 y=036931 x=037019 y=037021
x=037199 y=037201 x=037307 y=037309 x=037337 y=037339
x=037361 y=037363 x=037547 y=037549 x=037571 y=037573
x=037589 y=037591 x=037691 y=037693 x=037781 y=037783
x=037811 y=037813 x=037991 y=037993 x=038237 y=038239
x=038327 y=038329 x=038447 y=038449 x=038459 y=038461
x=038567 y=038569 x=038609 y=038611 x=038651 y=038653
x=038669 y=038671 x=038711 y=038713 x=038747 y=038749
x=038921 y=038923 x=039041 y=039043 x=039161 y=039163
x=039227 y=039229 x=039239 y=039241 x=039341 y=039343
x=039371 y=039373 x=039509 y=039511 x=039827 y=039829
x=039839 y=039841 x=040037 y=040039 x=040127 y=040129
x=040151 y=040153 x=040427 y=040429 x=040529 y=040531
x=040637 y=040639 x=040697 y=040699 x=040847 y=040849
x=041141 y=041143 x=041177 y=041179 x=041201 y=041203
x=041231 y=041233 x=041387 y=041389 x=041411 y=041413
x=041519 y=041521 x=041609 y=041611 x=041759 y=041761

x=041849 y=041851 x=041957 y=041959 x=041981 y=041983
x=042017 y=042019 x=042071 y=042073 x=042179 y=042181
x=042221 y=042223 x=042281 y=042283 x=042407 y=042409
x=042461 y=042463 x=042569 y=042571 x=042641 y=042643
x=042701 y=042703 x=042839 y=042841 x=042899 y=042901
x=043049 y=043051 x=043319 y=043321 x=043397 y=043399
x=043541 y=043543 x=043577 y=043579 x=043607 y=043609
x=043649 y=043651 x=043781 y=043783 x=043787 y=043789
x=043889 y=043891 x=043961 y=043963 x=044027 y=044029
x=044087 y=044089 x=044129 y=044131 x=044201 y=044203
x=044267 y=044269 x=044279 y=044281 x=044381 y=044383
x=044531 y=044533 x=044621 y=044623 x=044699 y=044701
x=044771 y=044773 x=045119 y=045121 x=045137 y=045139
x=045179 y=045181 x=045317 y=045319 x=045341 y=045343
x=045587 y=045589 x=045821 y=045823 x=046049 y=046051
x=046091 y=046093 x=046181 y=046183 x=046271 y=046273
x=046307 y=046309 x=046349 y=046351 x=046439 y=046441
x=046589 y=046591 x=046679 y=046681 x=046769 y=046771
x=046817 y=046819 x=046829 y=046831 x=047057 y=047059
x=047147 y=047149 x=047351 y=047353 x=047387 y=047389
x=047417 y=047419 x=047657 y=047659 x=047699 y=047701
x=047711 y=047713 x=047741 y=047743 x=047777 y=047779
x=047807 y=047809 x=048119 y=048121 x=048311 y=048313
x=048407 y=048409 x=048479 y=048481 x=048539 y=048541
x=048647 y=048649 x=048677 y=048679 x=048731 y=048733
x=048779 y=048781 x=048821 y=048823 x=048857 y=048859
x=048869 y=048871 x=048989 y=048991 x=049031 y=049033
x=049121 y=049123 x=049169 y=049171 x=049199 y=049201
x=049277 y=049279 x=049331 y=049333 x=049367 y=049369
x=049391 y=049393 x=049409 y=049411 x=049529 y=049531
x=049547 y=049549 x=049667 y=049669 x=049739 y=049741

x=049787 y=049789 x=049919 y=049921 x=049937 y=049939
x=049991 y=049993 x=050021 y=050023 x=050051 y=050053
x=050129 y=050131 x=050261 y=050263 x=050459 y=050461
x=050549 y=050551 x=050591 y=050593 x=050891 y=050893
x=050969 y=050971 x=051059 y=051061 x=051131 y=051133
x=051197 y=051199 x=051239 y=051241 x=051341 y=051343
x=051347 y=051349 x=051419 y=051421 x=051437 y=051439
x=051479 y=051481 x=051719 y=051721 x=051767 y=051769
x=051827 y=051829 x=051869 y=051871 x=051971 y=051973
x=052067 y=052069 x=052181 y=052183 x=052289 y=052291
x=052361 y=052363 x=052541 y=052543 x=052709 y=052711
x=052859 y=052861 x=052901 y=052903 x=053087 y=053089
x=053147 y=053149 x=053171 y=053173 x=053231 y=053233
x=053267 y=053269 x=053279 y=053281 x=053549 y=053551
x=053591 y=053593 x=053609 y=053611 x=053717 y=053719
x=053897 y=053899 x=054011 y=054013 x=054401 y=054403
x=054419 y=054421 x=054497 y=054499 x=054539 y=054541
x=054581 y=054583 x=054629 y=054631 x=054917 y=054919
x=055049 y=055051 x=055217 y=055219 x=055331 y=055333
x=055337 y=055339 x=055439 y=055441 x=055619 y=055621
x=055631 y=055633 x=055661 y=055663 x=055817 y=055819
x=055901 y=055903 x=055931 y=055933 x=056039 y=056041
x=056099 y=056101 x=056207 y=056209 x=056237 y=056239
x=056267 y=056269 x=056477 y=056479 x=056501 y=056503
x=056531 y=056533 x=056597 y=056599 x=056711 y=056713
x=056807 y=056809 x=056891 y=056893 x=056909 y=056911
x=056921 y=056923 x=057191 y=057193 x=057221 y=057223
x=057269 y=057271 x=057329 y=057331 x=057347 y=057349
x=057527 y=057529 x=057557 y=057559 x=057791 y=057793
x=057899 y=057901 x=058109 y=058111 x=058151 y=058153
x=058169 y=058171 x=058229 y=058231 x=058367 y=058369

x=058391 y=058393 x=058439 y=058441 x=058451 y=058453
x=058601 y=058603 x=058787 y=058789 x=058907 y=058909
x=059009 y=059011 x=059021 y=059023 x=059051 y=059053
x=059207 y=059209 x=059219 y=059221 x=059357 y=059359
x=059417 y=059419 x=059441 y=059443 x=059471 y=059473
x=059627 y=059629 x=059669 y=059671 x=060089 y=060091
x=060101 y=060103 x=060167 y=060169 x=060257 y=060259
x=060647 y=060649 x=060659 y=060661 x=060761 y=060763
x=060887 y=060889 x=060899 y=060901 x=060917 y=060919
x=061151 y=061153 x=061331 y=061333 x=061379 y=061381
x=061469 y=061471 x=061559 y=061561 x=061979 y=061981
x=062129 y=062131 x=062141 y=062143 x=062189 y=062191
x=062297 y=062299 x=062927 y=062929 x=062969 y=062971
x=062981 y=062983 x=062987 y=062989 x=063029 y=063031
x=063197 y=063199 x=063311 y=063313 x=063389 y=063391
x=063419 y=063421 x=063587 y=063589 x=063599 y=063601
x=063647 y=063649 x=063689 y=063691 x=063839 y=063841
x=064151 y=064153 x=064187 y=064189 x=064301 y=064303
x=064451 y=064453 x=064577 y=064579 x=064661 y=064663
x=064781 y=064783 x=064877 y=064879 x=064919 y=064921
x=065027 y=065029 x=065099 y=065101 x=065171 y=065173
x=065267 y=065269 x=065447 y=065449 x=065519 y=065521
x=065537 y=065539 x=065579 y=065581 x=065699 y=065701
x=065717 y=065719 x=065729 y=065731 x=065837 y=065839
x=065927 y=065929 x=065981 y=065983 x=066107 y=066109
x=066359 y=066361 x=066569 y=066571 x=066749 y=066751
x=066851 y=066853 x=066947 y=066949 x=067139 y=067141
x=067187 y=067189 x=067211 y=067213 x=067217 y=067219
x=067271 y=067273 x=067409 y=067411 x=067427 y=067429
x=067577 y=067579 x=067757 y=067759 x=067931 y=067933
x=068111 y=068113 x=068207 y=068209 x=068279 y=068281

x=068447 y=068449 x=068489 y=068491 x=068711 y=068713
x=068819 y=068821 x=068879 y=068881 x=068897 y=068899
x=069029 y=069031 x=069149 y=069151 x=069191 y=069193
x=069257 y=069259 x=069401 y=069403 x=069491 y=069493
x=069497 y=069499 x=069737 y=069739 x=069761 y=069763
x=069827 y=069829 x=069857 y=069859 x=069929 y=069931
x=070001 y=070003 x=070121 y=070123 x=070139 y=070141
x=070181 y=070183 x=070199 y=070201 x=070379 y=070381
x=070457 y=070459 x=070487 y=070489 x=070571 y=070573
x=070619 y=070621 x=070841 y=070843 x=070877 y=070879
x=070919 y=070921 x=070949 y=070951 x=070979 y=070981
x=070997 y=070999 x=071261 y=071263 x=071327 y=071329
x=071339 y=071341 x=071387 y=071389 x=071411 y=071413
x=071471 y=071473 x=071549 y=071551 x=071711 y=071713
x=071807 y=071809 x=071879 y=071881 x=072089 y=072091
x=072101 y=072103 x=072167 y=072169 x=072221 y=072223
x=072227 y=072229 x=072251 y=072253 x=072269 y=072271
x=072467 y=072469 x=072647 y=072649 x=072671 y=072673
x=072869 y=072871 x=073037 y=073039 x=073061 y=073063
x=073361 y=073363 x=073607 y=073609 x=073679 y=073681
x=073847 y=073849 x=074099 y=074101 x=074159 y=074161
x=074201 y=074203 x=074381 y=074383 x=074411 y=074413
x=074507 y=074509 x=074609 y=074611 x=074717 y=074719
x=074729 y=074731 x=074759 y=074761 x=075011 y=075013
x=075167 y=075169 x=075209 y=075211 x=075389 y=075391
x=075401 y=075403 x=075539 y=075541 x=075617 y=075619
x=075707 y=075709 x=075989 y=075991 x=076001 y=076003
x=076079 y=076081 x=076157 y=076159 x=076259 y=076261
x=076367 y=076369 x=076421 y=076423 x=076541 y=076543
x=076649 y=076651 x=076829 y=076831 x=076871 y=076873
x=076961 y=076963 x=077237 y=077239 x=077261 y=077263

x=077267 y=077269 x=077417 y=077419 x=077477 y=077479
x=077489 y=077491 x=077549 y=077551 x=077687 y=077689
x=077711 y=077713 x=078137 y=078139 x=078191 y=078193
x=078437 y=078439 x=078509 y=078511 x=078539 y=078541
x=078569 y=078571 x=078779 y=078781 x=078887 y=078889
x=078977 y=078979 x=079151 y=079153 x=079229 y=079231
x=079397 y=079399 x=079559 y=079561 x=079631 y=079633
x=079691 y=079693 x=079697 y=079699 x=079811 y=079813
x=079841 y=079843 x=079901 y=079903 x=079997 y=079999
x=080147 y=080149 x=080207 y=080209 x=080231 y=080233
x=080447 y=080449 x=080471 y=080473 x=080489 y=080491
x=080627 y=080629 x=080669 y=080671 x=080681 y=080683
x=080747 y=080749 x=080777 y=080779 x=080831 y=080833
x=080909 y=080911 x=081017 y=081019 x=081041 y=081043
x=081047 y=081049 x=081197 y=081199 x=081281 y=081283
x=081371 y=081373 x=081551 y=081553 x=081647 y=081649
x=081701 y=081703 x=081899 y=081901 x=081929 y=081931
x=081971 y=081973 x=082007 y=082009 x=082037 y=082039
x=082139 y=082141 x=082217 y=082219 x=082349 y=082351
x=082469 y=082471 x=082529 y=082531 x=082559 y=082561
x=082721 y=082723 x=082727 y=082729 x=082757 y=082759
x=082811 y=082813 x=082889 y=082891 x=083219 y=083221
x=083231 y=083233 x=083267 y=083269 x=083339 y=083341
x=083399 y=083401 x=083561 y=083563 x=083639 y=083641
x=083717 y=083719 x=084059 y=084061 x=084179 y=084181
x=084221 y=084223 x=084317 y=084319 x=084347 y=084349
x=084389 y=084391 x=084521 y=084523 x=084629 y=084631
x=084809 y=084811 x=084857 y=084859 x=084869 y=084871
x=084977 y=084979 x=085091 y=085093 x=085199 y=085201
x=085331 y=085333 x=085361 y=085363 x=085427 y=085429
x=085451 y=085453 x=085619 y=085621 x=085667 y=085669

x=085817 y=085819 x=085829 y=085831 x=085931 y=085933
x=086027 y=086029 x=086111 y=086113 x=086291 y=086293
x=086351 y=086353 x=086369 y=086371 x=086531 y=086533
x=086627 y=086629 x=086927 y=086929 x=087011 y=087013
x=087119 y=087121 x=087149 y=087151 x=087179 y=087181
x=087221 y=087223 x=087251 y=087253 x=087509 y=087511
x=087539 y=087541 x=087557 y=087559 x=087587 y=087589
x=087629 y=087631 x=087641 y=087643 x=087719 y=087721
x=087959 y=087961 x=088001 y=088003 x=088259 y=088261
x=088337 y=088339 x=088469 y=088471 x=088589 y=088591
x=088607 y=088609 x=088661 y=088663 x=088799 y=088801
x=088811 y=088813 x=088817 y=088819 x=089069 y=089071
x=089519 y=089521 x=089561 y=089563 x=089597 y=089599
x=089657 y=089659 x=089669 y=089671 x=089819 y=089821
x=089897 y=089899 x=090017 y=090019 x=090071 y=090073
x=090197 y=090199 x=090371 y=090373 x=090401 y=090403
x=090437 y=090439 x=090527 y=090529 x=090617 y=090619
x=090677 y=090679 x=090821 y=090823 x=091079 y=091081
x=091097 y=091099 x=091127 y=091129 x=091139 y=091141
x=091151 y=091153 x=091367 y=091369 x=091457 y=091459
x=091571 y=091573 x=091811 y=091813 x=091967 y=091969
x=092177 y=092179 x=092219 y=092221 x=092381 y=092383
x=092399 y=092401 x=092459 y=092461 x=092567 y=092569
x=092639 y=092641 x=092669 y=092671 x=092681 y=092683
x=092789 y=092791 x=092861 y=092863 x=092957 y=092959
x=093131 y=093133 x=093239 y=093241 x=093251 y=093253
x=093281 y=093283 x=093479 y=093481 x=093491 y=093493
x=093557 y=093559 x=093701 y=093703 x=093761 y=093763
x=093809 y=093811 x=093887 y=093889 x=093911 y=093913
x=094007 y=094009 x=094109 y=094111 x=094151 y=094153
x=094307 y=094309 x=094349 y=094351 x=094397 y=094399

x=094439 y=094441 x=094529 y=094531 x=094541 y=094543
x=094559 y=094561 x=094649 y=094651 x=094847 y=094849
x=094949 y=094951 x=095087 y=095089 x=095189 y=095191
x=095231 y=095233 x=095441 y=095443 x=095789 y=095791
x=095801 y=095803 x=095957 y=095959 x=095987 y=095989
x=096179 y=096181 x=096221 y=096223 x=096329 y=096331
x=096587 y=096589 x=096737 y=096739 x=096797 y=096799
x=096821 y=096823 x=097001 y=097003 x=097157 y=097159
x=097169 y=097171 x=097301 y=097303 x=097367 y=097369
x=097379 y=097381 x=097499 y=097501 x=097547 y=097549
x=097577 y=097579 x=097607 y=097609 x=097649 y=097651
x=097787 y=097789 x=097841 y=097843 x=097847 y=097849
x=097859 y=097861 x=098009 y=098011 x=098297 y=098299
x=098321 y=098323 x=098387 y=098389 x=098561 y=098563
x=098639 y=098641 x=098711 y=098713 x=098729 y=098731
x=098807 y=098809 x=098867 y=098869 x=098897 y=098899
x=098909 y=098911 x=098927 y=098929 x=099131 y=099133
x=099137 y=099139 x=099257 y=099259 x=099347 y=099349
x=099527 y=099529 x=099707 y=099709 x=099719 y=099721
x=099989 y=099991

第七章 双孪生素数

中间间隔一个奇合数的相邻两对孪生素数构成一组“双孪生素数”。“双孪生素数”是否有无穷多组？尚未得证明，下面就此问题予以讨论。

7.1 求解证明

设 A 为大于 60000 的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示，则 E 的基数 $|E|$ 为：$|E|=A$

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，且将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$P=(p_1,p_2,...,p_r)$

$$2=p_1<p_2<...<p_r\leqslant A^{1/2} \tag{1}$$

命集合 $N=(p_r+1,p_r+2,...,A)$，则 N 的基数

$$|N|=n=A-p_r \tag{2}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定以下四个筛选条件：

$$g\neq 0\ (\bmod p_i),\qquad i=1,2,...,r \tag{3}$$

$$g\neq 2\ (\bmod p_i),\qquad i=1,2,...,r \tag{4}$$

$$g\neq 6\ (\bmod p_i),\qquad i=1,2,...,r \tag{5}$$

$$g\neq 8\ (\bmod p_i),\qquad i=1,2,...,r \tag{6}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（3），（4），（5），（6）式条件所有元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

7.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中的元素为互不相同的素数。根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = n\prod_{i=1}^{r}(\frac{\alpha_i}{P_i}) \tag{7}$$

根据第一章的（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{n})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{8}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时， $p_1=2$

显然，2，6，8 皆可被 2 整除，故知此时（3），（4），（5），（6）式合并为一个条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_1} \tag{9}$$

依据（9）式可知，集合 N 中只有模 p_1 的“1 同余类子集”一个符合筛选条件，故得

$$\alpha_1 = 1 \tag{10}$$

当 $i=2$ 时， $p_2=3$， 由于

$$6 \equiv 0 \pmod 3$$

$$8 \equiv 2 \pmod 3$$

所以，筛选条件（3），（4），（5），（6）合并为两个条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_2} \tag{11}$$

$$g \neq 2 \pmod{p_2} \tag{12}$$

依据（11）式和（12）式可知，集合 N 中只有模 p_2 的“1

同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_2 = 1 \tag{13}$$

当$i > 2$时，筛选条件（3）（4）（5）（6）对应于四个不同的同余类子集。由此可知，此时只有模p_i的“0 同余类子集”“2 同余类子集”“与 6 同余类子集”和“与 8 同余类子集”这四个同余类子集之外的其余同余类子集才能符合筛选条件，故得：

$$\alpha_i = p_i - 4, \qquad i > 2 \tag{14}$$

将（10），（13），和（14）代入（7）式得

$$|N_B| = n(\frac{1}{6})\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \tag{15}$$

将（10）（13）和（14）代入（8）式得

$$|N_B| > F_1\{\frac{n}{6}\}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \tag{16}$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{p_i}{n}) > 1 - (\frac{1}{n})\sum_{i=1}^{r} p_i \tag{17}$$

由第一章（77）式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \tag{18}$$

（18）式表明，数值越大的区域素数分布的密度越小，故得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 17 + \sum_{i=5}^{r} p_i < 17 + (\frac{1}{2})(p_5 + p_r)\{\Pi(p_r) - 4\} =$$

$$17 + \frac{(p_5 + p_r)}{2}\Pi(p_r) - 2(p_5 + p_r) \tag{19}$$

根据第一章（82）式可知

$$\Pi(p_r) < (6\ln 2)(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{20}$$

（20）式代入（19）式可得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < 17 - 2(p_5 + p_r) + \frac{(6\ln 2)(p_5 + p_r)p_r}{2\ln p_r} \tag{21}$$

将（21）式代入（17）式可得

$$F_1 > 1 + \{\frac{2(p_5 + p_r)}{n}\} - (\frac{17}{n}) - \{\frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{n\ln p_r}\} \tag{22}$$

将（22）式代入（16）式可得

$$|N_B| > \{\frac{n}{6} + \frac{(p_5 + p_r)}{3}\}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) -$$

$$\{\frac{17}{6} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{6\ln p_r}\}\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \tag{23}$$

$$令 F_2 = \frac{n}{6} + \frac{p_5 + p_r}{3} \tag{24}$$

$$F_3 = \frac{17}{6} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{6\ln p_r} \tag{25}$$

将（24）式和（25）式代入（23）式得

$$|N_B| > F_2\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) - F_3\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \tag{26}$$

将 F_2 作以下变换

$$F_2 = F_2(\frac{p_7}{p_9 - 4}) + F_2(\frac{2}{p_9 - 4}) \tag{27}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_8}{p_{10} - 4}) + F_2(\frac{6}{p_{10} - 4}) \tag{28}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_9}{p_{11} - 4}) + F_2(\frac{4}{p_{11} - 4}) \tag{29}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{10}}{p_{12} - 4}) + F_2(\frac{4}{p_{12} - 4}) \tag{30}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{11}}{p_{13}-4})+F_2(\frac{6}{p_{13}-4}) \tag{31}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{12}}{p_{14}-4})+F_2(\frac{2}{p_{14}-4}) \tag{32}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{13}}{p_{15}-4})+F_2(\frac{2}{p_{15}-4}) \tag{33}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{14}}{p_{16}-4})+F_2(\frac{6}{p_{16}-4}) \tag{34}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{15}}{p_{17}-4})+F_2(\frac{8}{p_{17}-4}) \tag{35}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{16}}{p_{18}-4})+F_2(\frac{4}{p_{18}-4}) \tag{36}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{17}}{p_{19}-4})+F_2(\frac{4}{p_{19}-4}) \tag{37}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{18}}{p_{20}-4})+F_2(\frac{6}{p_{20}-4}) \tag{38}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{19}}{p_{21}-4})+F_2(\frac{2}{p_{21}-4}) \tag{39}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{20}}{p_{22}-4})+F_2(\frac{4}{p_{22}-4}) \tag{40}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{21}}{p_{23}-4})+F_2(\frac{6}{p_{23}-4}) \tag{41}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{22}}{p_{24}-4})+F_2(\frac{6}{p_{24}-4}) \tag{42}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{23}}{p_{25}-4})+F_2(\frac{10}{p_{25}-4}) \tag{43}$$

$$F_2=F_2(\frac{p_{24}}{p_{26}-4})+F_2(\frac{8}{p_{26}-4}) \tag{44}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{25}}{p_{27}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{27}-4}) \tag{45}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{26}}{p_{28}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{28}-4}) \tag{46}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{27}}{p_{29}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{29}-4}) \tag{47}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{28}}{p_{30}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{30}-4}) \tag{48}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{29}}{p_{31}-4}) + F_2(\frac{14}{p_{31}-4}) \tag{49}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{30}}{p_{32}-4}) + F_2(\frac{14}{p_{32}-4}) \tag{50}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{31}}{p_{33}-4}) + F_2(\frac{6}{p_{33}-4}) \tag{51}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{32}}{p_{34}-4}) + F_2(\frac{4}{p_{34}-4}) \tag{52}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{33}}{p_{35}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{35}-4}) \tag{53}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{34}}{p_{36}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{36}-4}) \tag{54}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{35}}{p_{37}-4}) + F_2(\frac{4}{p_{37}-4}) \tag{55}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{36}}{p_{38}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{38}-4}) \tag{56}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{37}}{p_{39}-4}) + F_2(\frac{6}{p_{39}-4}) \tag{57}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{38}}{p_{40}-4}) + F_2(\frac{6}{p_{40}-4}) \tag{58}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{39}}{p_{41}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{41}-4}) \tag{59}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{40}}{p_{42}-4}) + F_2(\frac{4}{p_{42}-4}) \tag{60}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{41}}{p_{43}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{43}-4}) \tag{61}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{42}}{p_{44}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{44}-4}) \tag{62}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{43}}{p_{45}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{45}-4}) \tag{63}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{44}}{p_{46}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{46}-4}) \tag{64}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{45}}{p_{47}-4}) + F_2(\frac{10}{p_{47}-4}) \tag{65}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{46}}{p_{48}-4}) + F_2(\frac{20}{p_{48}-4}) \tag{66}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{47}}{p_{49}-4}) + F_2(\frac{12}{p_{49}-4}) \tag{67}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{48}}{p_{50}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{50}-4}) \tag{68}$$

将（27）～（68）逐次代入前一项，可得：

$$F_2 = F_2\prod_{j=9}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}) + F_4 \tag{69}$$

式中：

$$F_4 = (\frac{2F_2}{p_9-4})\prod_{j=10}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}) + (\frac{6F_2}{p_{10}-4})\prod_{j=11}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}) +$$

$$(\frac{4F_2}{p_{11}-4})\prod_{j=12}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{4F_2}{p_{12}-4})\prod_{j=13}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{6F_2}{p_{13}-4})\prod_{j=14}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{2F_2}{p_{14}-4})\prod_{j=15}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{2F_2}{p_{15}-4})\prod_{j=16}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{6F_2}{p_{16}-4})\prod_{j=17}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{8F_2}{p_{17}-4})\prod_{j=18}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{4F_2}{p_{18}-4})\prod_{j=19}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{4F_2}{p_{19}-4})\prod_{j=20}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{6F_2}{p_{20}-4})\prod_{j=21}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{2F_2}{p_{21}-4})\prod_{j=22}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{4F_2}{p_{22}-4})\prod_{j=23}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{6F_2}{p_{23}-4})\prod_{j=24}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{6F_2}{p_{24}-4})\prod_{j=25}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{10F_2}{p_{25}-4})\prod_{j=26}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{8F_2}{p_{26}-4})\prod_{j=27}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{2F_2}{p_{27}-4})\prod_{j=28}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{2F_2}{p_{28}-4})\prod_{j=29}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{2F_2}{p_{29}-4})\prod_{j=30}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{2F_2}{p_{30}-4})\prod_{j=31}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{14F_2}{p_{31}-4})\prod_{j=32}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{14F_2}{p_{32}-4})\prod_{j=33}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{6F_2}{p_{33}-4})\prod_{j=34}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{4F_2}{p_{34}-4})\prod_{j=35}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{8F_2}{p_{35}-4})\prod_{j=36}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{8F_2}{p_{36}-4})\prod_{j=37}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{4F_2}{p_{37}-4})\prod_{j=38}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{8F_2}{p_{38}-4})\prod_{j=39}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{6F_2}{p_{39}-4})\prod_{j=40}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{6F_2}{p_{40}-4})\prod_{j=41}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{8F_2}{p_{41}-4})\prod_{j=42}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{4F_2}{p_{42}-4})\prod_{j=43}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{8F_2}{p_{43}-4})\prod_{j=44}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{8F_2}{p_{44}-4})\prod_{j=45}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{2F_2}{p_{45}-4})\prod_{j=46}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{2F_2}{p_{46}-4})\prod_{j=47}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{10F_2}{p_{47}-4})\prod_{j=48}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{20F_2}{p_{48}-4})\prod_{j=49}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{12F_2}{p_{49}-4})(\frac{p_{48}}{p_{50}-4})+(\frac{2F_2}{p_{50}-4}) \tag{70}$$

将 $p_8=19$，$p_9=23$，$p_{10}=29$，$p_{11}=31$，$p_{12}=37$，$p_{13}=41$，$p_{14}=43$，$p_{15}=47$，$p_{16}=53$，$p_{17}=59$，$p_{18}=61$，$p_{19}=67$，$p_{20}=71$，$p_{21}=73$，$p_{22}=79$，$p_{23}=83$，$p_{24}=89$，$p_{25}=97$，$p_{26}=101$，$p_{27}=103$，$p_{28}=107$，$p_{29}=109$，$p_{30}=113$，$p_{31}=127$，$p_{32}=131$，$p_{33}=137$，$p_{34}=139$，$p_{35}=149$，$p_{36}=151$，$p_{37}=157$，$p_{38}=163$，$p_{39}=167$，$p_{40}=173$，$p_{41}=179$，$p_{42}=181$，$p_{43}=191$，$p_{44}=193$，$p_{45}=197$，$p_{46}=199$，$p_{47}=211$，$p_{48}=223$，$p_{49}=227$，$p_{50}=229$ 代入

（70）式可得

$$F_4 = 0.9477F_2 \tag{71}$$

将（71）式代入（69）式得

$$F_2 = F_2\prod_{j=9}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + 0.9477F_2 \tag{72}$$

将（72）式代入（26）式得

$$|N_B| > F_2\prod_{j=9}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4})\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) + F_5 \tag{73}$$

$$F_5 = (0.9477F_2 - F_3)\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \tag{74}$$

令 $F_6 = 0.9477F_2 - F_3$ （75）

将（75）式代入（74）式得

$$F_5 = F_6\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \tag{76}$$

将（24）式，（25）式代入（75）式可得

$$F_6 = \frac{0.9477n}{6} + \frac{0.9477(p_5 + p_r)}{3} - \frac{17}{6} - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{6\ln p_r} =$$

$$0.641 + 0.1579(n + 2p_r) - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{6\ln p_r} \tag{77}$$

将（1）式和（2）式代入（77）式得

$$F_6 \geqslant 0.641 + \{0.1579(p_r + 1) - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{6\ln p_r}\}p_r =$$

$$0.641 + F_7 p_r \tag{78}$$

$$F_7 = 0.1579(p_r + 1) - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{6\ln p_r} \tag{79}$$

$$\frac{dF_7}{dp_r}=0.1579-(\frac{2.08}{6})\{\frac{\ln p_r-(p_5+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\}=$$

$$0.1579-\frac{2.08}{6\ln p_r}+\frac{2.08(p_5+p_r)}{6p_r\ln^2 p_r}>0.1579-\frac{2.08}{6\ln p_r} \quad (80)$$

令　$$0.1579-\frac{2.08}{6\ln p_r}>0$$

得：　$$p_r>9 \quad (81)$$

将条件(81)式代入(80)式得

$$\frac{dF_7}{dp_r}>0 \qquad (p_r>9) \quad (82)$$

由（82）式知，当 $p_r>9$ 时，F_7 为 p_r 的增值函数。

当 A≥60000 时，　$p_r\geqslant 241>9$

且 $F_7(p_r=241)=22.8$

故知　$$F_7>22 \qquad (A\geqslant 60000) \quad (83)$$

将（83）代入（78）式得

$$F_6>0.641+22p_r \quad (84)$$

（84）式 代入（76）式得：

$$F_5>(0.641+22p_r)\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i})=$$

$$(0.641+22p_r)(\frac{1}{5})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \quad (85)$$

已知　$$p_i-4\geqslant p_{i-2} \qquad (i\geqslant 4) \quad (86)$$

由（86）式，（85）式可得

$$F_5>(0.641+22p_r)(\frac{1}{5})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i})=$$

$$(0.641+22p_r)(\frac{3}{p_{r-1}p_r})>0 \tag{87}$$

将（24）式和（87）式代入（73）式得

$$|N_B|>(\frac{n}{6}+\frac{p_5+p_r}{3})\prod_{j=9}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{88}$$

将（86）式代入（88）式得

$$|N_B|>(\frac{n}{6}+\frac{p_5+p_r}{3})\prod_{j=3}^{8}(\frac{p_j-4}{p_j})\prod_{i=9}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i})=$$

$$(\frac{n}{6}+\frac{p_5+p_r}{3})(\frac{189}{5005})(\frac{195}{p_7p_8})\{\frac{p_7p_8}{p_{r-1}p_r}\}=$$

$$(\frac{n}{6}+\frac{11+p_r}{3})(\frac{7.36}{p_{r-1}p_r}) \tag{89}$$

将（1）式和（2）式代入（89）式得

$$|N_B|>(\frac{p_r^{\ 2}}{6}+\frac{p_r}{6}+\frac{11}{3})(\frac{7.36}{p_{r-1}p_r}) \tag{90}$$

已知 $p_r \geqslant p_{r-1}+2$，故由（90）式可得

$$|N_B|>\{\frac{p_r(p_{r-1}+2)}{6}+\frac{p_r}{6}+\frac{11}{3}\}\{\frac{7.36}{p_{r-1}p_r}\}=$$

$$1.226+\frac{3.68}{p_{r-1}}+\frac{27}{p_{r-1}p_r}>1.226 \tag{91}$$

7.1.2 通过子集 N_B 求解

我们从集合 N_B 中任取一个元素 l_1，再引入参量：

$$l_2=l_1-2 \tag{92}$$

$$l_3=l_1-6 \tag{93}$$

$$l_4=l_1-8 \tag{94}$$

显然，$l_1 \in E$，$l_1 > 1$　（95）

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$l_1 \equiv l_{1i} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$l_2 \equiv l_{2i} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$l_3 \equiv l_{3i} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$l_4 \equiv l_{4i} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

由于 $l_1 \in N_B$，由筛选条件（3），（4），（5），（6）式可知，

$$l_{1i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{96}$$

$$l_{1i} \neq 2, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{97}$$

$$l_{1i} \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{98}$$

$$l_{1i} \not\equiv 8 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{99}$$

由前述定义可知，

$$l_2 \in E, \qquad l_2 > 1 \tag{100}$$

$$l_3 \in E, \qquad l_3 > 1 \tag{101}$$

$$l_4 \in E, \qquad l_4 > 1 \tag{102}$$

依据同余式的性质，由（92）式，（93）式，（94）式可推得

$$l_{2i} \equiv l_{1i} - 2 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{103}$$

$$l_{3i} \equiv l_{1i} - 6 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{104}$$

$$l_{4i} \equiv l_{1i} - 8 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{105}$$

由（97）式和（103）式可知

$$l_{2i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{106}$$

由（98）式和（104）式可知

$$l_{3i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{107}$$

由（99）式和（105）式可知

$$l_{4i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{108}$$

依据第一章引理 3，由（95）式，（96）式可知：l_1 为奇素数。

依据第一章引理 3，由（100）式，（106）式可知：l_2 为奇素数。

依据第一章引理 3，由（101）式，（107）式可知：l_3 为奇素数。

依据第一章引理 3，由（102）式，（108）式可知：l_4 为奇素数。

由（92）式，（93）式和（94）式可知

$$l_1 - l_2 = 2, \quad l_2 - l_3 = 4, \quad l_3 - l_4 = 2 \tag{109}$$

故知，（l_1，l_2，l_3，l_4）构成双孪生素数。

（注：l_1，l_2，$l_2 - 2$，l_3，l_4 这五个数构成公差 $\Delta = 2$ 的正整数等差级数。若以素数 3 为模数，则模数 3 与公差 2 互素。根据正整数等差级数的基本特征可知，上述五个元素中任意相邻的三个元素都构成模 3 的完全剩余组。 即任意相邻的三个元素中必定有一个能被 3 整除。由于 l_1，l_2，l_3，l_4 都是素数，都不能被 3 整除，所以，只有 $l_2 - 2$ 能被 3 整除，故 $l_2 - 2$ 为复合数）。

由（96）式，（106）式，（107）式和（108）式可知 l_1，l_2，l_3 和 l_4 四个素数都不属于集合 P。所以，其中最小的素数 l_4 亦满足下列不等式：

$$l_4 > p_r \tag{110}$$

根据定义，p_r 是不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数，故大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$。即有：

$$l_4 > A^{1/2} \tag{111}$$

由（95）式可知，l_1，l_2，l_3，l_4 四个素数中最大的素数 l_1 应满足下述不等式

$$l_1 \leqslant A \tag{112}$$

由（91）式，（111）式和（112）式可知，在区间 $(A, A^{1/2})$ 内至少有 2 组双孪生素数，再考虑到上述推证过程中用到的（83）

式的限制条件，则可得一条定律如下。

双孪生素数定律：对于不小于 60000 的任意正整数 A 而言，在区间 $(A, A^{1/2})$ 内，至少有两组双孪生素数。

7.2 双孪生素数的无限性

根据“双孪生素数定律”可知在区间 $(A^{1/2}, A)$ $(A > 60000)$ 内至少有两组双孪生素数，同理，在区间 (A, A^2) 内，在区间 (A^2, A^4) 内，……都至少有两组双孪生素数。当 A 的指数趋向无穷时，双孪生素数自然有无穷多组。

7.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset
=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>双孪生素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno() (
    var a=form1.a.value;
    if(a==""||a==null) (
        alert("请输入一个数字（13 以上）！");
        return;
    ) else if(parseInt(a)<13) (
```

```
            alert("输入的数字必须大于 13！");
            return;
        ）form1.submit();
    ）
    </script>

    </head>

    <body bgcolor="#BFC0B6">
    <p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
双孪生素数求解程序</strong></font></p>
    <p align="center"> </p>
    <p align="center"> </p>
    <p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
    <form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
      <table width="500" border="0" align="center"
cellpadding="5" cellspacing="0">
        <tr>
          <td width="161" align="right">请输入一个数字（13 以上）:
</td>
          <td width="319"><input name="a" type="text" id="a"></td>
        </tr>
      <tr>
        <td align="center" colspan="2"><input type="button" name=
"Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
               
            <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
        </tr>
      </table>
```

```
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>双孪生素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点
击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font color="
#FF0000" size="5"><strong>双孪生素数求解运算结果</strong></font>
</div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_a = new Array();
```

```
//var array_ai = new Array();
var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<10)
 (
   document.write("输入错误！");
) else (
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a
为：</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
//n=parseInt(a/2);
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
 (//alert(array_pi[i]);
     flag=1;
     for(j=2;j<=(pi/2);j++)
      (
         if(pi%j==0)
```

```
            (
                flag=0;
                break;
            )
        )
        if(flag==1)
         (
            //ni=n%pi;
            //array_ni[i]=ni;
            array_pi[i]=pi;
            //array_pi2[i]=pi;
            //array_ai[i]=a%pi;
            //array_pi_ni[i]=pi-ni
            //alert(array_pi[i]);
            //document.write(array_pi[i]+" ");
            i++;
         )
    )
//document.write("<br>");
ther=i;


for(i=0;i<a-12;i++) (
      array_a[i]=i+13;
      //document.write(array_a[i]+" ");
      //alert(array_n[i]);
)
//document.write("<br>");
for(i=0;i<array_a.length;i++)
 (
```

```
          for(k=0;k<array_pi.length;k++)
           (

     if(array_pi[k]!=2&&array_pi[k]!=5&&array_pi[k]!=7) (

     if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==2)||(
array_a[i]%array_pi[k]==6)||(array_a[i]%array_pi[k]==8))
                         (
                              array_a[i]=0;
                              break;
                         )
               ) else if(array_pi[k]==2) (
                    if(array_a[i]%array_pi[k]==0)
                         (
                              array_a[i]=0;
                              break;
                         )
               ) else if(array_pi[k]==5) (

     if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==2)||(
array_a[i]%array_pi[k]==1)||(array_a[i]%array_pi[k]==3))
                         (
                              array_a[i]=0;
                              break;
                         )
               ) else if(array_pi[k]==7) (

     if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==2)||(
array_a[i]%array_pi[k]==6)||(array_a[i]%array_pi[k]==1))
```

```
                    (
                        array_a[i]=0;
                        break;
                    )
            )
        )
    )
    x=0;
    for(i=0;i<array_a.length;i++) (
        if(array_a[i]>0) (
            //document.write(array_a[i]+" ");
            x++;
        )
        //alert(array_n[i]);
    )

    document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合N
中求得的双孪生素数的组数为：</font>" + x + "<br>");
    if(x>0) (
        document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合N
中求得的双孪生素数为：</font><br>");
        var astr=new String(a);
        var thelength=astr.length;
        var x11,x22,x33,x44;
        m=1;
        for(i=0;i<a-12;i++)
         (
            switch(array_a[i])
             (
```

```
case 0: break;
default:
        x1=array_a[i];
        x2=array_a[i]-2;
        x3=array_a[i]-6;
        x4=array_a[i]-8;
        x11=new String(x1);
        for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) (
                x11="0"+""+x11;
        )
        x22=new String(x2);
        for(var iii=x22.length;iii<thelength;iii++) (
                x22="0"+""+x22;
        )
        x33=new String(x3);
        for(var iii=x33.length;iii<thelength;iii++) (
                x33="0"+""+x33;
        )
        x44=new String(x4);
        for(var iii=x44.length;iii<thelength;iii++) (
                x44="0"+""+x44;
        )
        document.write("<font
size='4'>x</font>1="+x44+"  <font  size='4'>x</font>2="+x33+"
<font          size='4'>x</font>3="+x22+"          <font
size='4'>x</font>4="+x11+";     ");
        if(m%2==0)
         (
          document.write("<br>");
```

```
                )
                m=m+1;
        )

    )
)

document.all("wait_div").style.display="none";
document.all("wait2_div").style.display="";
)
</script>
</p></body>
</html>
```

7.4　实筛数据

输入的数 a 为：20

从集合 N 中求得的双孪生素数的组数为：2

从集合 N 中求得的双孪生素数为：

$x1$=05　$x2$=07　$x3$=11　$x4$=13

$x1$=11　$x2$=13　$x3$=17　$x4$=19

输入的数 a 为：10000

从集合 N 中求得的双孪生素数的组数为：10

从集合 N 中求得的双孪生素数为：

$x1$=00101　$x2$=00103　$x3$=00107　$x4$=00109

$x1$=00191　$x2$=00193　$x3$=00197　$x4$=00199

$x1$=00821　$x2$=00823　$x3$=00827　$x4$=00829

$x1$=01481　$x2$=01483　$x3$=01487　$x4$=01489

$x1$=01871 $x2$=01873 $x3$=01877 $x4$=01879
$x1$=02081 $x2$=02083 $x3$=02087 $x4$=02089
$x1$=03251 $x2$=03253 $x3$=03257 $x4$=03259
$x1$=03461 $x2$=03463 $x3$=03467 $x4$=03469
$x1$=05651 $x2$=05653 $x3$=05657 $x4$=05659
$x1$=09431 $x2$=09433 $x3$=09437 $x4$=09439

输入的数 a 为：100000
从集合 N 中求得的双孪生素数的组数为：34
从集合 N 中求得的双孪生素数为：
$x1$=000821 $x2$=000823 $x3$=000827 $x4$=000829
$x1$=001481 $x2$=001483 $x3$=001487 $x4$=001489
$x1$=001871 $x2$=001873 $x3$=001877 $x4$=001879
$x1$=002081 $x2$=002083 $x3$=002087 $x4$=002089
$x1$=003251 $x2$=003253 $x3$=003257 $x4$=003259
$x1$=003461 $x2$=003463 $x3$=003467 $x4$=003469
$x1$=005651 $x2$=005653 $x3$=005657 $x4$=005659
$x1$=009431 $x2$=009433 $x3$=009437 $x4$=009439
$x1$=013001 $x2$=013003 $x3$=013007 $x4$=013009
$x1$=015641 $x2$=015643 $x3$=015647 $x4$=015649
$x1$=015731 $x2$=015733 $x3$=015737 $x4$=015739
$x1$=016061 $x2$=016063 $x3$=016067 $x4$=016069
$x1$=018041 $x2$=018043 $x3$=018047 $x4$=018049
$x1$=018911 $x2$=018913 $x3$=018917 $x4$=018919
$x1$=019421 $x2$=019423 $x3$=019427 $x4$=019429
$x1$=021011 $x2$=021013 $x3$=021017 $x4$=021019
$x1$=022271 $x2$=022273 $x3$=022277 $x4$=022279
$x1$=025301 $x2$=025303 $x3$=025307 $x4$=025309
$x1$=031721 $x2$=031723 $x3$=031727 $x4$=031729
$x1$=034841 $x2$=034843 $x3$=034847 $x4$=034849
$x1$=043781 $x2$=043783 $x3$=043787 $x4$=043789

$x1=051341$　$x2=051343$　$x3=051347$　$x4=051349$

$x1=055331$　$x2=055333$　$x3=055337$　$x4=055339$

$x1=062981$　$x2=062983$　$x3=062987$　$x4=062989$

$x1=067211$　$x2=067213$　$x3=067217$　$x4=067219$

$x1=069491$　$x2=069493$　$x3=069497$　$x4=069499$

$x1=072221$　$x2=072223$　$x3=072227$　$x4=072229$

$x1=077261$　$x2=077263$　$x3=077267$　$x4=077269$

$x1=079691$　$x2=079693$　$x3=079697$　$x4=079699$

$x1=081041$　$x2=081043$　$x3=081047$　$x4=081049$

$x1=082721$　$x2=082723$　$x3=082727$　$x4=082729$

$x1=088811$　$x2=088813$　$x3=088817$　$x4=088819$

$x1=097841$　$x2=097843$　$x3=097847$　$x4=097849$

$x1=099131$　$x2=099133$　$x3=099137$　$x4=099139$

第八章　展翅孪生素数

“展翅孪生素数”是指一对孪生素数与其两侧差值为 4 的两个素数一起构成的素数组。（p_1,p_2,p_3,p_4 为素数，$p_1-p_2=4$，$p_2-p_3=2$，$p_3-p_4=4$）。

“展翅孪生素数”是否有无穷多组，亦未得到证明。就此论述如下。

8.1　求解证明

设 A 为大于 60000 的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示，则 E 的基数 $|E|$ 为：$|E|=A$

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，且将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\ldots<p_r\le A^{1/2} \tag{1}$$

命集合 $N=(p_r+1,p_r+2,\ldots,A)$，则 N 的基数

$$|N|=n=A-p_r \tag{2}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定以下四个筛选条件：

$$g\ne 0 \pmod{p_i},\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{3}$$

$$g\ne 4 \pmod{p_i},\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{4}$$

$$g\ne 6 \pmod{p_i},\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{5}$$

$$g\ne 10 \pmod{p_i},\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{6}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（3），（4），（5），（6）式条件的所有元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

8.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中的元素为互不相同的素数。根据第一章（61）式可知，$|N_B|$ 的近似估算式为

$$|N_B| = n\prod_{i=1}^{r}(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{7}$$

根据第一章（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{n})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{8}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取模 p_i 的同余类子集的个数，下面具体确定 α_i 的数值：

当 $i=1$ 时，$p_1=2$

显然，4，6，10 皆可被 2 整除，故知，此时（3），（4），（5），（6）式合并为一个条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_1} \tag{9}$$

依据（9）式可知，集合 N 中只有模 p_1 的“1 同余类子集”一个符合条件，故得

$$\alpha_1 = 1 \tag{10}$$

当 $i=2$ 时，$p_2=3$

由于 $6 \equiv 0 \pmod 3$

$10 \equiv 4 \pmod 3$

所以，筛选条件（3），（4），（5），（6）合为两个条件：

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_2} \tag{11}$$

$$g \not\equiv 4 \pmod{p_2} \tag{12}$$

依据（11）和（12）式可知，集合 N 中只有模 p_2 的“2 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_2 = 1 \tag{13}$$

当 $i=3$ 时，$p_3=5$

由于 $10 \equiv 0 \pmod 5$

所以，筛选条件（3），（4），（5），（6）式合为三个条件：

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_3} \tag{14}$$

$$g \not\equiv 4 \pmod{p_3} \tag{15}$$

$$g \not\equiv 6 \pmod{p_3} \tag{16}$$

依据（14），（15）和（16）式可知，集合 N 中只有模 p_3 的“2 同余类子集”和“3 同余类子集”符合筛选条件，故得：

$$\alpha_3 = 2 \tag{17}$$

当 $i>3$ 时，筛选条件（3），（4），（5），（6）对应于四个不同的同余类子集，除了这四个同余类子集外其余 (p_i-4) 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件，故得

$$\alpha_i = p_i - 4\,, \qquad i>3 \tag{18}$$

将（10），（13），（17）和（18）式代入（7）式得

$$|N_B| = (\frac{n}{15})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{19}$$

将（10），（13），（17）和（18）式代入（8）式得

$$|N_B| > F_1\{\frac{n}{15}\}\prod_{i=4}^{r}\{\frac{p_i-4}{p_i}\} \tag{20}$$

$$F_1=\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{n})>1-(\frac{1}{n})\sum_{i=1}^{r}p_i \qquad (21)$$

由第一章（77）式推得：

$$\Pi(x)-\Pi(\frac{x}{2})<\Pi(\frac{x}{2}) \qquad (22)$$

（22）式表明，数值越大的区域素数分布的密度越小，故得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i=17+\sum_{i=5}^{r}p_i<17+(\frac{1}{2})(p_5+p_r)\{\Pi(p_r)-4\}=$$

$$17+\frac{(p_5+p_r)}{2}\Pi(p_r)-2(p_5+p_r) \qquad (23)$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r)<(6\ln 2)(p_r/\ln p_r) \qquad (24)$$

（24）式代入（23）式可得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i<17-2(p_5+p_r)+\frac{(6\ln 2)p_r(p_5+p_r)}{2\ln p_r} \qquad (25)$$

将（25）式代入（21）式可得

$$F_1>1+\frac{2(p_5+p_r)}{n}-(\frac{17}{n}+\frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{n\ln p_r}) \qquad (26)$$

将（26）式代入（20）式得

$$|N_B|>F_2\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i})-F_3\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \qquad (27)$$

$$F_2=\frac{n}{15}+\frac{2(p_5+p_r)}{15} \qquad (28)$$

$$F_3=\frac{17}{15}+\frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{15\ln p_r} \qquad (29)$$

将 F_2 作以下变换

$$F_2 = F_2(\frac{p_7}{p_9 - 4}) + F_2(\frac{2}{p_9 - 4}) \tag{30}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_8}{p_{10} - 4}) + F_2(\frac{6}{p_{10} - 4}) \tag{31}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_9}{p_{11} - 4}) + F_2(\frac{4}{p_{11} - 4}) \tag{32}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{10}}{p_{12} - 4}) + F_2(\frac{4}{p_{12} - 4}) \tag{33}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{11}}{p_{13} - 4}) + F_2(\frac{6}{p_{13} - 4}) \tag{34}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{12}}{p_{14} - 4}) + F_2(\frac{2}{p_{14} - 4}) \tag{35}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{13}}{p_{15} - 4}) + F_2(\frac{2}{p_{15} - 4}) \tag{36}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{14}}{p_{16} - 4}) + F_2(\frac{6}{p_{16} - 4}) \tag{37}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{15}}{p_{17} - 4}) + F_2(\frac{8}{p_{17} - 4}) \tag{38}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{16}}{p_{18} - 4}) + F_2(\frac{4}{p_{18} - 4}) \tag{39}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{17}}{p_{19} - 4}) + F_2(\frac{4}{p_{19} - 4}) \tag{40}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{18}}{p_{20} - 4}) + F_2(\frac{6}{p_{20} - 4}) \tag{41}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{19}}{p_{21} - 4}) + F_2(\frac{2}{p_{21} - 4}) \tag{42}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{20}}{p_{22} - 4}) + F_2(\frac{4}{p_{22} - 4}) \tag{43}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{21}}{p_{23}-4}) + F_2(\frac{6}{p_{23}-4}) \tag{44}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{22}}{p_{24}-4}) + F_2(\frac{6}{p_{24}-4}) \tag{45}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{23}}{p_{25}-4}) + F_2(\frac{10}{p_{25}-4}) \tag{46}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{24}}{p_{26}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{26}-4}) \tag{47}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{25}}{p_{27}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{27}-4}) \tag{48}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{26}}{p_{28}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{28}-4}) \tag{49}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{27}}{p_{29}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{29}-4}) \tag{50}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{28}}{p_{30}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{30}-4}) \tag{51}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{29}}{p_{31}-4}) + F_2(\frac{14}{p_{31}-4}) \tag{52}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{30}}{p_{32}-4}) + F_2(\frac{14}{p_{32}-4}) \tag{53}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{31}}{p_{33}-4}) + F_2(\frac{6}{p_{33}-4}) \tag{54}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{32}}{p_{34}-4}) + F_2(\frac{4}{p_{34}-4}) \tag{55}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{33}}{p_{35}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{35}-4}) \tag{56}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{34}}{p_{36}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{36}-4}) \tag{57}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{35}}{p_{37}-4}) + F_2(\frac{4}{p_{37}-4}) \tag{58}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{36}}{p_{38}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{38}-4}) \tag{59}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{37}}{p_{39}-4}) + F_2(\frac{6}{p_{39}-4}) \tag{60}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{38}}{p_{40}-4}) + F_2(\frac{6}{p_{40}-4}) \tag{61}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{39}}{p_{41}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{41}-4}) \tag{62}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{40}}{p_{42}-4}) + F_2(\frac{4}{p_{42}-4}) \tag{63}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{41}}{p_{43}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{43}-4}) \tag{64}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{42}}{p_{44}-4}) + F_2(\frac{8}{p_{44}-4}) \tag{65}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{43}}{p_{45}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{45}-4}) \tag{66}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{44}}{p_{46}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{46}-4}) \tag{67}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{45}}{p_{47}-4}) + F_2(\frac{10}{p_{47}-4}) \tag{68}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{46}}{p_{48}-4}) + F_2(\frac{20}{p_{48}-4}) \tag{69}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{47}}{p_{49}-4}) + F_2(\frac{12}{p_{49}-4}) \tag{70}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{48}}{p_{50}-4}) + F_2(\frac{2}{p_{50}-4}) \tag{71}$$

将（30）~（71）式逐次代入等式右端第一项，可得

$$F_2 = F_2\prod_{j=9}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + F_4 \tag{72}$$

$$F_4 = (\frac{2F_2}{p_9 - 4})\prod_{j=10}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{6F_2}{p_{10} - 4})\prod_{j=11}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{4F_2}{p_{11} - 4})\prod_{j=12}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{4F_2}{p_{12} - 4})\prod_{j=13}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{6F_2}{p_{13} - 4})\prod_{j=14}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{2F_2}{p_{14} - 4})\prod_{j=15}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{2F_2}{p_{15} - 4})\prod_{j=16}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{6F_2}{p_{16} - 4})\prod_{j=17}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{8F_2}{p_{17} - 4})\prod_{j=18}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{4F_2}{p_{18} - 4})\prod_{j=19}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{4F_2}{p_{19} - 4})\prod_{j=20}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{6F_2}{p_{20} - 4})\prod_{j=21}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{2F_2}{p_{21} - 4})\prod_{j=22}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{4F_2}{p_{22} - 4})\prod_{j=23}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{6F_2}{p_{23} - 4})\prod_{j=24}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{6F_2}{p_{24} - 4})\prod_{j=25}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{10F_2}{p_{25} - 4})\prod_{j=26}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{8F_2}{p_{26} - 4})\prod_{j=27}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{2F_2}{p_{27} - 4})\prod_{j=28}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) + (\frac{2F_2}{p_{28} - 4})\prod_{j=29}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j - 4}) +$$

$$(\frac{2F_2}{p_{29}-4})\prod_{j=30}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{2F_2}{p_{30}-4})\prod_{j=31}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{14F_2}{p_{31}-4})\prod_{j=32}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{14F_2}{p_{32}-4})\prod_{j=33}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{6F_2}{p_{33}-4})\prod_{j=34}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{4F_2}{p_{34}-4})\prod_{j=35}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{8F_2}{p_{35}-4})\prod_{j=36}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{8F_2}{p_{36}-4})\prod_{j=37}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{4F_2}{p_{37}-4})\prod_{j=38}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{8F_2}{p_{38}-4})\prod_{j=39}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{6F_2}{p_{39}-4})\prod_{j=40}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{6F_2}{p_{40}-4})\prod_{j=41}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{8F_2}{p_{41}-4})\prod_{j=42}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{4F_2}{p_{42}-4})\prod_{j=43}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{8F_2}{p_{43}-4})\prod_{j=44}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{8F_2}{p_{44}-4})\prod_{j=45}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{2F_2}{p_{45}-4})\prod_{j=46}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{2F_2}{p_{46}-4})\prod_{j=47}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{10F_2}{p_{47}-4})\prod_{j=48}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+(\frac{20F_2}{p_{48}-4})\prod_{j=49}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})+$$

$$(\frac{12F_2}{p_{49}-4})(\frac{p_{48}}{p_{50}-4})+(\frac{2F_2}{p_{50}-4}) \tag{73}$$

将 $p_8=19$， $p_9=23$， $p_{10}=29$， $p_{11}=31$， $p_{12}=37$， $p_{13}=41$， $p_{14}=43$， $p_{15}=47$， $p_{16}=53$， $p_{17}=59$， $p_{18}=61$， $p_{19}=67$，

$p_{20}=71$，$p_{21}=73$，$p_{22}=79$，$p_{23}=83$，$p_{24}=89$，$p_{25}=97$，$p_{26}=101$，$p_{27}=103$，$p_{28}=107$，$p_{29}=109$，$p_{30}=113$，$p_{31}=127$，$p_{32}=131$，$p_{33}=137$，$p_{34}=139$，$p_{35}=149$，$p_{36}=151$，$p_{37}=157$，$p_{38}=163$，$p_{39}=167$，$p_{40}=173$，$p_{41}=179$，$p_{42}=181$，$p_{43}=191$，$p_{44}=193$，$p_{45}=197$，$p_{46}=199$，$p_{47}=211$，$p_{48}=223$，$p_{49}=227$，$p_{50}=229$ 代入（73）式可得

$$F_4=0.9477F_2 \tag{74}$$

将（74）式代入（72）式得

$$F_2=F_2\prod_{j=9}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right)+0.9477F_2 \tag{75}$$

将（75）式代入（27）式

$$|N_B|>F_2\prod_{j=9}^{50}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j-4}\right)\prod_{i=4}^{r}\left(\frac{p_i-4}{p_i}\right)+F_5 \tag{76}$$

$$F_5=(0.9477F_2-F_3)\prod_{i=4}^{r}\left(\frac{p_i-4}{p_i}\right) \tag{77}$$

令　$F_6=0.9477F_2-F_3$　（78）

得

$$F_5=F_6\prod_{i=4}^{r}\left(\frac{p_i-4}{p_i}\right) \tag{79}$$

将（28），（29）式代入（78）式得

$$F_6=0.9477\left\{\frac{n}{15}+\frac{2(p_5+p_r)}{15}\right\}-\left\{\frac{17}{15}+\frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{15\ln p_r}\right\} \tag{80}$$

将（1）和（2）式代入（80）式整理可得：

$$F_6 \geqslant 0.2566+\{\frac{0.9477(p_r+1)}{15}-\frac{2.08(p_5+p_r)}{15\ln p_r}\}p_r=$$

$$0.2566+F_7 p_r \tag{81}$$

$$F_7=0.06318(p_r+1)-\frac{0.1386(p_5+p_r)}{\ln p_r} \tag{82}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_7}{\mathrm{d}p_r}=0.06318-0.1386\{\frac{\ln p_r-(p_5+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\}=$$

$$0.06318-\frac{0.1386}{\ln p_r}+\frac{0.1386(p_5+p_r)}{p_r\ln^2 p_r}>$$

$$0.06318-\frac{0.1386}{\ln p_r} \tag{83}$$

令　$0.06318-\dfrac{0.1386}{\ln p_r}>0$

得　　$p_r>8.969$　　　　(84)

将（84）条件代入（83）式得

$$\frac{\mathrm{d}F_7}{\mathrm{d}p_r}>0 \qquad (p_r>8.969) \tag{85}$$

由（85）式知，当 $p_r>8.969$ 时，F_7 为 p_r 的增值函数。

当　$A \geqslant 60000$ 时，　$p_r \geqslant 241 > 8.969$

且　$F_7(p_r=241)=8.91$

故知，$F_7>8.9$　（$A \geqslant 60000$）　　　　(86)

（86）代入（81）式得：

$F_6>0.2566+8.9p_r$　再代入（79）式：

$$F_5>(0.2566+8.9p_r)\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{87}$$

已知， $p_i-4\geqslant p_{i-2}$， $i\geqslant 4$ （88）

故， $F_5>(0.2566+8.9p_r)\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i})=$

$$(0.25666+8.9p_r)(\frac{15}{p_{r-1}p_r})>0 \qquad (89)$$

将（28）式和（89）式代入（76）式得

$$|N_B|>\{\frac{n}{15}+\frac{2(p_5+p_r)}{15}\}\prod_{j=9}^{50}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \qquad (90)$$

将（1）式和（2）式代入（90）式得

$$|N_B|>(\frac{{p_r}^2+p_r+22}{15})\prod_{j=4}^{8}(\frac{p_j-4}{p_j})\prod_{i=9}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i})=$$

$$(\frac{{p_r}^2+p_r+22}{15})(\frac{189}{1001})(\frac{195}{p_7p_8})(\frac{p_7p_8}{p_{r-1}p_r})=$$

$$({p_r}^2+p_r+22)(\frac{2.4545}{p_{r-1}p_r}) \qquad (91)$$

已知， $p_r\geqslant p_{r-1}+2$ 代入（91）式得

$$|N_B|>(p_rp_{r-1}+3p_r+22)(\frac{2.4545}{p_rp_{r-1}})=$$

$$2.4545+\{\frac{2.4545(3p_r+22)}{p_rp_{r-1}}\}>2.4545 \qquad (92)$$

8.1.2 通过子集 N_B 求解

从子集 N_B 中任取一个元素 m_1，再引入参量：

$$m_2=m_1-4 \qquad (93)$$

$$m_3=m_1-6 \qquad (94)$$

$$m_4=m_1-10 \qquad (95)$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$m_1 \equiv m_{1i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$m_2 \equiv m_{2i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$m_3 \equiv m_{3i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$m_4 \equiv m_{4i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

由 m_1 的定义可知

$$m_1 \in E \qquad m_1 > 1 \tag{96}$$

由于 $m_1 \in N_B$，依据筛选条件（3），（4），（5），（6）式可知

$$m_{1i} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{97}$$

$$m_{1i} \not\equiv 4 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{98}$$

$$m_{1i} \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{99}$$

$$m_{1i} \not\equiv 10 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{100}$$

依据第一章引理 3，由（96），（97）式可知

$$m_1 \text{为奇素数，且} m_1 > p_r \tag{101}$$

依据定义式（93），（94），（95）式和（101）式可知

$$m_2 \in E, \qquad m_2 > 1 \tag{102}$$

$$m_3 \in E, \qquad m_3 > 1 \tag{103}$$

$$m_4 \in E, \qquad m_4 > 1 \tag{104}$$

依据同余式的性质，由（93），（94），（95）式可推得

$$m_{2i} \equiv m_{1i} - 4 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{105}$$

$$m_{3i} \equiv m_{1i} - 6 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{106}$$

$$m_{4i} \equiv m_{1i} - 10 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{107}$$

由（98）和（105）式可知

$$m_{2i} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{108}$$

由（99）和（106）式可知

$$m_{3i} \neq 0\,, \qquad i = 1,2,\dots,r \tag{109}$$

由（100）和（107）式可知

$$m_{4i} \neq 0\,, \qquad i = 1,2,\dots,r \tag{110}$$

依据第一章引理 3，由（102），（108）可知：m_2 为奇素数。

依据第一章引理 3，由（103），（109）可知：m_3 为奇素数。

依据第一章引理 3，由（104），（110）可知：m_4 为奇素数。

由（93），（94），（95）式可得，

$$m_1 - m_2 = 4 \tag{111}$$

$$m_2 - m_3 = 2 \tag{112}$$

$$m_3 - m_4 = 4 \tag{113}$$

由（111），（112），（113）式可见（m_1，m_2，m_3，m_4）为一组展翅孪生素数。

（注：m_1，$m_1 - 2$，m_2，m_3，$m_3 - 2$，m_4 这六个数构成公差 $\Delta = 2$ 的正整数等差级数。若以素数 3 为模数，则模数 3 与公差 2 互素。根据正整数等差级数的基本特征可知，上述六个元素中任意相邻的三个元素都构成模 3 的完全剩余组。 即任意相邻的三个元素中必定有一个能被 3 整除。由于 m_1，m_2，m_3，m_4 都是素数，都不能被 3 整除，所以，只有 $m_1 - 2$ 和 $m_3 - 2$ 能被 3 整除，故 $m_1 - 2$ 和 $m_3 - 2$ 为复合数）。

由（110）式可知，素数 $m_4 > p_r$，根据 p_r 的定义可知，大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$，即有

$$m_4 > A^{1/2} \tag{114}$$

故由（92）式可知，在区间 $(A, A^{1/2})$ 内至少有 3 组展翅孪生

素数。再考虑到前述求证过程中（86）式的限制条件，可得定律如下。

展翅孪生素数定律：对不小于 60000 的任意正整数 A 而言，在区间$(A^{1/2},A)$之内，至少有 3 组展翅孪生素数。

8.2 展翅孪生素数的无限性

根据前节给出的展翅孪生素数定律可知，在区间$(A^{1/2},A)$ $(A>60000)$之内至少有 3 组展翅孪生素数，同理在区间(A,A^2)内，也至少有 3 组展翅孪生素数……，依次类推，当 A 的指数趋于无穷大时，必定展翅孪生素数有无限多组。

8.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件。

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>展翅孪生素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno()（
    var a=form1.a.value;
    if(a==""||a==null)（
        alert("请输入一个数字（17 以上）！");
        return;
    ）else if(parseInt(a)<17)（
```

```
            alert("输入的数字必须大于 17！");
            return;
        ) form1.submit();
    )
    </script>

    </head>

    <body bgcolor="#BFC0B6">
    <p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
展翅孪生素数求解程序</strong></font></p>
    <p align="center"> </p>
    <p align="center"> </p>
    <p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
    <form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
     <table width="500" border="0" align="center" cellpadding
="5" cellspacing="0">
        <tr>
          <td width="161" align="right">请输入一个数字（17
以上）：</td>
          <td width="319"><input name="a" type="text" id="a">
</td>
         </tr>
        <tr>
          <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
              
           <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
        </tr>
```

```
</table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font color="#FF0000" size="5"><strong>展翅孪生素数求解运算结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_a = new Array();
```

```
//var array_ai = new Array();
var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<17)
 {
    document.write("输入错误！ ");
} else {
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a 为：</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
//n=parseInt(a/2);
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
 {//alert(array_pi[i]);
      flag=1;
      for(j=2;j<=(pi/2);j++)
       {
          if(pi%j==0)
```

```
            (
                flag=0;
                break;
            )
        )
        if(flag==1)
         (
            //ni=n%pi;
            //array_ni[i]=ni;
            array_pi[i]=pi;
            //array_pi2[i]=pi;
            //array_ai[i]=a%pi;
            //array_pi_ni[i]=pi-ni
            //alert(array_pi[i]);
            //document.write(array_pi[i]+" ");
            i++;
        )
    )
    //document.write("<br>");
    ther=i;


    for(i=0;i<a-16;i++) (
        array_a[i]=i+17;
        //document.write(array_a[i]+" ");
        //alert(array_n[i]);
    )
    //document.write("<br>");
    for(i=0;i<array_a.length;i++)
     (
```

```
for(k=0;k<array_pi.length;k++)
 （
if(array_pi[k]!=2&&array_pi[k]!=3&&array_pi[k]!=5&&array_pi[k]!=7)（

if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==4)||(array_a[i]%array_pi[k]==6)||(array_a[i]%array_pi[k]==10))
                （
                    array_a[i]=0;
                    break;
                ）
        ）else if(array_pi[k]==2)（
            if(array_a[i]%array_pi[k]==0)
                （
                    array_a[i]=0;
                    break;
                ）
        ）else if(array_pi[k]==3)（

if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==1))
                （
                    array_a[i]=0;
                    break;
                ）
        ）else if(array_pi[k]==5)（

if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==4)||(array_a[i]%array_pi[k]==1))
                （
                    array_a[i]=0;
```

```
                        break;
                    )
                ) else if(array_pi[k]==7) (

        if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==4)||(
array_a[i]%array_pi[k]==6)||(array_a[i]%array_pi[k]==3))
                    (
                        array_a[i]=0;
                        break;
                    )
                )
            )
        )
        x=0;
        for(i=0;i<array_a.length;i++) (
            if(array_a[i]>0) (
                //document.write(array_a[i]+" ");
                x++;
            )
            //alert(array_n[i]);
        )

        document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的展翅孪生素数的组数为：</font>" + x + "<br>");
        if(x>0) (
            document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的展翅孪生素数为：</font><br>");
            var astr=new String(a);
            var thelength=astr.length;
```

```
var x11,x22,x33,x44;
m=1;
for(i=0;i<array_a.length;i++)
 (
    switch(array_a[i])
     (
        case 0: break;
        default:
              x1=array_a[i];
              x2=array_a[i]-4;
              x3=array_a[i]-6;
              x4=array_a[i]-10;
              x11=new String(x1);
              for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) (
                    x11="0"+""+x11;
              )
              x22=new String(x2);
              for(var iii=x22.length;iii<thelength;iii++) (
                    x22="0"+""+x22;
              )
              x33=new String(x3);
              for(var iii=x33.length;iii<thelength;iii++) (
                    x33="0"+""+x33;
              )
              x44=new String(x4);
              for(var iii=x44.length;iii<thelength;iii++) (
                    x44="0"+""+x44;
              )
              document.write("<font
size='4'>x</font>1="+x44+"  <font
```

```
size='4'>x</font>2="+x33+" <font size='4'>x</font>3="+x22+" 
 <font  size='4'>x</font>4="+x11+" ;     
 ");
                    if(m%2==0)
                     (
                      document.write("<br>");

                    )
                     m=m+1;
            )

        )
     )

     document.all("wait_div").style.display="none";
     document.all("wait2_div").style.display="";
     )
     </script>
     </p></body>
     </html>
```

8.4 实筛数据

输入的数 a 为：20

从集合 N 中求得的展翅孪生素数的组数为：1

从集合 N 中求得的展翅孪生素数为：

$x1$=07　　$x2$=11　　$x3$=13　　$x4$=17

输入的数 a 为：10000

从集合 N 中求得的展翅孪生素数的组数为：21

从集合 N 中求得的展翅孪生素数为：

x1=00103　　x2=00107　　x3=00109　　x4=00113
x1=00223　　x2=00227　　x3=00229　　x4=00233
x1=00307　　x2=00311　　x3=00313　　x4=00317
x1=00457　　x2=00461　　x3=00463　　x4=00467
x1=00853　　x2=00857　　x3=00859　　x4=00863
x1=00877　　x2=00881　　x3=00883　　x4=00887
x1=01087　　x2=01091　　x3=01093　　x4=01097
x1=01297　　x2=01301　　x3=01303　　x4=01307
x1=01423　　x2=01427　　x3=01429　　x4=01433
x1=01483　　x2=01487　　x3=01489　　x4=01493
x1=01867　　x2=01871　　x3=01873　　x4=01877
x1=01993　　x2=01997　　x3=01999　　x4=02003
x1=02683　　x2=02687　　x3=02689　　x4=02693
x1=03457　　x2=03461　　x3=03463　　x4=03467
x1=04513　　x2=04517　　x3=04519　　x4=04523
x1=04783　　x2=04787　　x3=04789　　x4=04793
x1=05227　　x2=05231　　x3=05233　　x4=05237
x1=05647　　x2=05651　　x3=05653　　x4=05657
x1=06823　　x2=06827　　x3=06829　　x4=06833
x1=07873　　x2=07877　　x3=07879　　x4=07883
x1=08287　　x2=08291　　x3=08293　　x4=08297

输入的数 a 为：200000

从集合 N 中求得的展翅孪生素数的组数为：117

从集合 N 中求得的展翅孪生素数为：

x1=000457　　x2=000461　　x3=000463　　x4=000467
x1=000853　　x2=000857　　x3=000859　　x4=000863
x1=000877　　x2=000881　　x3=000883　　x4=000887
x1=001087　　x2=001091　　x3=001093　　x4=001097

x1=001297 x2=001301 x3=001303 x4=001307
x1=001423 x2=001427 x3=001429 x4=001433
x1=001483 x2=001487 x3=001489 x4=001493
x1=001867 x2=001871 x3=001873 x4=001877
x1=001993 x2=001997 x3=001999 x4=002003
x1=002683 x2=002687 x3=002689 x4=002693
x1=003457 x2=003461 x3=003463 x4=003467
x1=004513 x2=004517 x3=004519 x4=004523
x1=004783 x2=004787 x3=004789 x4=004793
x1=005227 x2=005231 x3=005233 x4=005237
x1=005647 x2=005651 x3=005653 x4=005657
x1=006823 x2=006827 x3=006829 x4=006833
x1=007873 x2=007877 x3=007879 x4=007883
x1=008287 x2=008291 x3=008293 x4=008297
x1=010453 x2=010457 x3=010459 x4=010463
x1=013687 x2=013691 x3=013693 x4=013697
x1=013873 x2=013877 x3=013879 x4=013883
x1=015727 x2=015731 x3=015733 x4=015737
x1=016057 x2=016061 x3=016063 x4=016067
x1=016063 x2=016067 x3=016069 x4=016073
x1=016183 x2=016187 x3=016189 x4=016193
x1=017383 x2=017387 x3=017389 x4=017393
x1=019417 x2=019421 x3=019423 x4=019427
x1=019423 x2=019427 x3=019429 x4=019433
x1=020743 x2=020747 x3=020749 x4=020753
x1=021013 x2=021017 x3=021019 x4=021023
x1=021313 x2=021317 x3=021319 x4=021323
x1=022273 x2=022277 x3=022279 x4=022283
x1=023053 x2=023057 x3=023059 x4=023063
x1=023557 x2=023561 x3=023563 x4=023567
x1=023623 x2=023627 x3=023629 x4=023633

$x1$=024103　$x2$=024107　$x3$=024109　$x4$=024113
$x1$=027733　$x2$=027737　$x3$=027739　$x4$=027743
$x1$=029017　$x2$=029021　$x3$=029023　$x4$=029027
$x1$=031387　$x2$=031391　$x3$=031393　$x4$=031397
$x1$=033343　$x2$=033347　$x3$=033349　$x4$=033353
$x1$=033613　$x2$=033617　$x3$=033619　$x4$=033623
$x1$=035527　$x2$=035531　$x3$=035533　$x4$=035537
$x1$=036007　$x2$=036011　$x3$=036013　$x4$=036017
$x1$=037987　$x2$=037991　$x3$=037993　$x4$=037997
$x1$=040423　$x2$=040427　$x3$=040429　$x4$=040433
$x1$=042013　$x2$=042017　$x3$=042019　$x4$=042023
$x1$=042457　$x2$=042461　$x3$=042463　$x4$=042467
$x1$=043777　$x2$=043781　$x3$=043783　$x4$=043787
$x1$=043783　$x2$=043787　$x3$=043789　$x4$=043793
$x1$=044263　$x2$=044267　$x3$=044269　$x4$=044273
$x1$=045817　$x2$=045821　$x3$=045823　$x4$=045827
$x1$=051193　$x2$=051197　$x3$=051199　$x4$=051203
$x1$=054493　$x2$=054497　$x3$=054499　$x4$=054503
$x1$=055333　$x2$=055337　$x3$=055339　$x4$=055343
$x1$=055813　$x2$=055817　$x3$=055819　$x4$=055823
$x1$=060913　$x2$=060917　$x3$=060919　$x4$=060923
$x1$=079687　$x2$=079691　$x3$=079693　$x4$=079697
$x1$=080677　$x2$=080681　$x3$=080683　$x4$=080687
$x1$=081013　$x2$=081017　$x3$=081019　$x4$=081023
$x1$=082003　$x2$=082007　$x3$=082009　$x4$=082013
$x1$=086287　$x2$=086291　$x3$=086293　$x4$=086297
$x1$=088657　$x2$=088661　$x3$=088663　$x4$=088667
$x1$=088807　$x2$=088811　$x3$=088813　$x4$=088817
$x1$=090397　$x2$=090401　$x3$=090403　$x4$=090407
$x1$=090523　$x2$=090527　$x3$=090529　$x4$=090533
$x1$=091453　$x2$=091457　$x3$=091459　$x4$=091463

$x1$=092377 $x2$=092381 $x3$=092383 $x4$=092387
$x1$=092857 $x2$=092861 $x3$=092863 $x4$=092867
$x1$=093487 $x2$=093491 $x3$=093493 $x4$=093497
$x1$=093553 $x2$=093557 $x3$=093559 $x4$=093563
$x1$=095083 $x2$=095087 $x3$=095089 $x4$=095093
$x1$=096997 $x2$=097001 $x3$=097003 $x4$=097007
$x1$=098317 $x2$=098321 $x3$=098323 $x4$=098327
$x1$=101107 $x2$=101111 $x3$=101113 $x4$=101117
$x1$=101527 $x2$=101531 $x3$=101533 $x4$=101537
$x1$=108877 $x2$=108881 $x3$=108883 $x4$=108887
$x1$=110563 $x2$=110567 $x3$=110569 $x4$=110573
$x1$=110917 $x2$=110921 $x3$=110923 $x4$=110927
$x1$=111487 $x2$=111491 $x3$=111493 $x4$=111497
$x1$=113017 $x2$=113021 $x3$=113023 $x4$=113027
$x1$=113143 $x2$=113147 $x3$=113149 $x4$=113153
$x1$=113167 $x2$=113171 $x3$=113173 $x4$=113177
$x1$=114193 $x2$=114197 $x3$=114199 $x4$=114203
$x1$=115873 $x2$=115877 $x3$=115879 $x4$=115883
$x1$=116923 $x2$=116927 $x3$=116929 $x4$=116933
$x1$=118897 $x2$=118901 $x3$=118903 $x4$=118907
$x1$=120937 $x2$=120941 $x3$=120943 $x4$=120947
$x1$=123727 $x2$=123731 $x3$=123733 $x4$=123737
$x1$=126223 $x2$=126227 $x3$=126229 $x4$=126233
$x1$=132523 $x2$=132527 $x3$=132529 $x4$=132533
$x1$=134587 $x2$=134591 $x3$=134593 $x4$=134597
$x1$=136393 $x2$=136397 $x3$=136399 $x4$=136403
$x1$=144163 $x2$=144167 $x3$=144169 $x4$=144173
$x1$=148147 $x2$=148151 $x3$=148153 $x4$=148157
$x1$=150373 $x2$=150377 $x3$=150379 $x4$=150383
$x1$=151237 $x2$=151241 $x3$=151243 $x4$=151247
$x1$=152833 $x2$=152837 $x3$=152839 $x4$=152843

$x1=153067$ $x2=153071$ $x3=153073$ $x4=153077$
$x1=155377$ $x2=155381$ $x3=155383$ $x4=155387$
$x1=163477$ $x2=163481$ $x3=163483$ $x4=163487$
$x1=163987$ $x2=163991$ $x3=163993$ $x4=163997$
$x1=164617$ $x2=164621$ $x3=164623$ $x4=164627$
$x1=165703$ $x2=165707$ $x3=165709$ $x4=165713$
$x1=166843$ $x2=166847$ $x3=166849$ $x4=166853$
$x1=171043$ $x2=171047$ $x3=171049$ $x4=171053$
$x1=172213$ $x2=172217$ $x3=172219$ $x4=172223$
$x1=173773$ $x2=173777$ $x3=173779$ $x4=173783$
$x1=177883$ $x2=177887$ $x3=177889$ $x4=177893$
$x1=179947$ $x2=179951$ $x3=179953$ $x4=179957$
$x1=187123$ $x2=187127$ $x3=187129$ $x4=187133$
$x1=190573$ $x2=190577$ $x3=190579$ $x4=190583$
$x1=191827$ $x2=191831$ $x3=191833$ $x4=191837$
$x1=193597$ $x2=193601$ $x3=193603$ $x4=193607$
$x1=195043$ $x2=195047$ $x3=195049$ $x4=195053$
$x1=195733$ $x2=195737$ $x3=195739$ $x4=195743$
$x1=195967$ $x2=195971$ $x3=195973$ $x4=195977$
$x1=198823$ $x2=198827$ $x3=198829$ $x4=198833$

第九章　相邻等差三素数

三个相邻素数组成的等差级数是否有无穷多组，本章将对这一问题进行讨论。

9.1　求解证明

设 A 为大于 23000 的正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏（Eratosthenes）筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\ldots<p_r\le A^{1/2} \tag{1}$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示，$N=(p_r+1,p_r+2,\ldots,A)$，则基数 $|N|$ 为

$$|N|=A-p_r \tag{2}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g\equiv 1\ (\text{mod}\, p_1) \tag{3}$$

$$g\equiv 2\ (\text{mod}\, p_2) \tag{4}$$

$$g\equiv 4\ (\text{mod}\, p_3) \tag{5}$$

$$g\equiv 3\ (\text{mod}\, p_4) \tag{6}$$

$$g\not\equiv 0\ (\text{mod}\, p_i),\qquad i=5,6,\ldots,r \tag{7}$$

$$g\not\equiv 6\ (\text{mod}\, p_i),\qquad i=5,6,\ldots,r \tag{8}$$

$$g\not\equiv 12\ (\text{mod}\, p_i),\qquad i=5,6,\ldots,r \tag{9}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（3），（4），（5），（6），（7），（8）和（9）式条件的所有元素分选出来，组成子集 N_B 再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

9.1.1　求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数，根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{10}$$

根据第一章中公式（72）式可知基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为：

$$|N_B| > |N|\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{p_i}{|N|}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{11}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数，下面具体确定 α_i 的数值。

根据（3）式可知，集合 N 中按模数 p_1 只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件，故得，

$$\alpha_1 = 1 \tag{12}$$

根据（4）式可知，集合 N 中按模数 p_2 只有模 p_2 的“2 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_2 = 1 \tag{13}$$

根据（5）式可知，集合 N 中按模数 p_3 只有模 p_3 的“4 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_3 = 1 \tag{14}$$

根据（6）式可知，集合 N 中按模数 p_4 只有模 p_4 的“3 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_4 = 1 \tag{15}$$

当 $i \geqslant 5$ 时，0，6，12 对于模 p_i 两两皆不同余，即 0，6，12 属于三个不同的同余类子集。故知，集合 N 中有三个模 p_i 的同余类子集不符合筛选条件，其余 $(p_i - 3)$ 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件，故得

$$\alpha_i = p_i - 3, \qquad i = 5,6,7....,r \tag{16}$$

将（12），（13），（14），（15）和（16）式代入（10）式，

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^{4} (\frac{1}{p_i}) \prod_{j=5}^{r} (\frac{p_j - 3}{p_j}) \tag{17}$$

将（12），（13），（14），（15）和（16）式代入（11）式，

$$|N_B| > F_1 |N| \prod_{i=1}^{4} (\frac{1}{p_i}) \prod_{j=5}^{r} (\frac{p_j - 3}{p_j}) \tag{18}$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{p_i}{|N|}) > 1 - (\frac{1}{|N|}) \sum_{i=1}^{r} p_i \tag{19}$$

由第一章（77）式推得

$$\Pi(x) - \Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \tag{20}$$

由（20）式可知，数值越大的区域素数分布的密度越小，故得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 17 + \sum_{i=5}^{r} p_i < 17 + (\frac{p_5 + p_r}{2})(\Pi(p_r) - 4) =$$

$$17 + (\frac{p_5 + p_r}{2})\Pi(p_r) - 2(p_5 + p_r) \tag{21}$$

根据切比晓夫不等式可知，

$$\Pi(p_r) < (6\ln 2)(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{22}$$

由（21）和（22）式，可得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < 17 + \frac{(6\ln 2)p_r(p_5+p_r)}{2\ln p_r} - 2(p_5+p_r\} \tag{23}$$

将（23）代入（19）式，得

$$F_1 > 1 + \frac{2(p_5+p_r)}{|N|} - \{\frac{17}{|N|} + \frac{2.08p_r(p_5+p_r)}{|N|\ln p_r}\} \tag{24}$$

将（24）代入（18）式，得

$$|N_B| > F_2\prod_{j=5}^{r}(\frac{p_j-3}{p_j}) - F_3\prod_{j=5}^{r}(\frac{p_j-3}{p_j}) \tag{25}$$

$$F_2 = \frac{|N|}{210} + \frac{p_5+p_r}{105} \tag{26}$$

$$F_3 = \frac{17}{210} + \frac{2.08p_r(p_5+p_r)}{210\ln p_r} \tag{27}$$

将 F_2 作以下变换：

$$F_2 = F_2(\frac{p_{10}}{p_{12}-3}) + F_2(\frac{5}{p_{12}-3}) \tag{28}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{11}}{p_{13}-3}) + F_2(\frac{7}{p_{13}-3}) \tag{29}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{12}}{p_{14}-3}) + F_2(\frac{3}{p_{14}-3}) \tag{30}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{13}}{p_{15}-3}) + F_2(\frac{3}{p_{15}-3}) \tag{31}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{14}}{p_{16}-3}) + F_2(\frac{7}{p_{16}-3}) \tag{32}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{15}}{p_{17}-3}) + F_2(\frac{9}{p_{17}-3}) \tag{33}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{16}}{p_{18}-3}) + F_2(\frac{5}{p_{18}-3}) \tag{34}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{17}}{p_{19}-3}) + F_2(\frac{5}{p_{19}-3}) \tag{35}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{18}}{p_{20}-3}) + F_2(\frac{7}{p_{20}-3}) \tag{36}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{19}}{p_{21}-3}) + F_2(\frac{3}{p_{21}-3}) \tag{37}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{20}}{p_{22}-3}) + F_2(\frac{5}{p_{22}-3}) \tag{38}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{21}}{p_{23}-3}) + F_2(\frac{7}{p_{23}-3}) \tag{39}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{22}}{p_{24}-3}) + F_2(\frac{7}{p_{24}-3}) \tag{40}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{23}}{p_{25}-3}) + F_2(\frac{11}{p_{25}-3}) \tag{41}$$

$$F_2 = F_2(\frac{p_{24}}{p_{26}-3}) + F_2(\frac{9}{p_{26}-3}) \tag{42}$$

将（28）~（42）式逐次代入右端第一项得

$$F_2 = F_2\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + F_4 \tag{43}$$

其中

$$F_4 = (\frac{5F_2}{p_{12}-3})\prod_{i=13}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{7F_2}{p_{13}-3})\prod_{i=14}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) +$$

$$(\frac{3F_2}{p_{14}-3})\prod_{i=15}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{3F_2}{p_{15}-3})\prod_{i=16}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) +$$

$$(\frac{7F_2}{p_{16}-3})\prod_{i=17}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) + (\frac{9F_2}{p_{17}-3})\prod_{i=18}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}) +$$

$$(\frac{5F_2}{p_{18}-3})\prod_{i=19}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})+(\frac{5F_2}{p_{19}-3})\prod_{i=20}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})+$$

$$(\frac{7F_2}{p_{20}-3})\prod_{i=21}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})+(\frac{3F_2}{p_{21}-3})\prod_{i=22}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})+$$

$$(\frac{5F_2}{p_{22}-3})\prod_{i=23}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})+(\frac{7F_2}{p_{23}-3})\prod_{i=24}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})+$$

$$(\frac{7F_2}{p_{24}-3})\prod_{i=25}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})+$$

$$(\frac{11F_2}{p_{25}-3})(\frac{p_{24}}{p_{26}-3})+(\frac{9F_2}{p_{26}-3}) \tag{44}$$

将 $p_{11}=31$， $p_{12}=37$， $p_{13}=41$， $p_{14}=43$， $p_{15}=47$， $p_{16}=53$， $p_{17}=59$， $p_{18}=61$， $p_{19}=67$， $p_{20}=71$， $p_{21}=73$， $p_{22}=79$， $p_{23}=83$， $p_{24}=89$， $p_{25}=97$， $p_{26}=101$ 代入（44）式可得

$$F_4=0.8033F_2 \tag{45}$$

将（45）代入（43）式，得

$$F_2=F_2\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})+0.8033F_2 \tag{46}$$

将（46）代入（25）式，可得

$$|N_B|>F_2\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})\prod_{j=5}^{r}(\frac{p_j-3}{p_j})+$$

$$(0.8033F_2-F_3)\prod_{j=5}^{r}(\frac{p_j-3}{p_j}) \tag{47}$$

令 $F_5=0.8033F_2-F_3$ （48）

得

$$|N_B| > F_2\prod_{i=12}^{26}(\frac{p_{i-2}}{p_i-3})\prod_{j=5}^{r}(\frac{p_j-3}{p_j}) + F_5\prod_{j=5}^{r}(\frac{p_j-3}{p_j}) \quad (49)$$

将（26），（27）式代入（48）式，得

$$F_5 = \frac{0.8033|N|}{210} + \frac{0.8033(p_5+p_r)}{105} - \frac{17}{210} - \frac{2.08p_r(p_5+p_r)}{210\ln p_r} \quad (50)$$

将（1），（2）式代入（50）式，得

$$F_5 \geqslant 0.0032029 + F_6 p_r \quad (51)$$

其中：$F_6 = \frac{0.8033}{210} + (\frac{0.8033}{210})p_r - \{\frac{2.08(p_5+p_r)}{210\ln p_r}\}$ （52）

对 F_6 求导数，可得

$$\frac{dF_6}{dp_r} = \frac{0.8033}{210} - (\frac{2.08}{210})\{\frac{\ln p_r - (p_5+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\} = \frac{0.8033}{210} - \frac{2.08}{210\ln p_r} + \frac{2.08(p_5+p_r)}{210p_r\ln^2 p_r} > \frac{0.8033}{210} - \frac{2.08}{210\ln p_r} \quad (53)$$

令 $\frac{0.8033}{210} - \frac{2.08}{210\ln p_r} > 0$

得，　$p_r > 13.32$ （54）

将条件（54）式代入（53）式，可得

$$\frac{dF_6}{dp_r} > 0 \qquad (p_r > 13.32) \quad (55)$$

由（55）式可知，当 $p_r > 13.32$ 时，F_6 为 p_r 的递增函数。

当 $A > 23000$ 时，　$p_r \geqslant 151 > 13.32$

且有 $F_6\ (p_r = 151) = 54.9$

故知　$F_6 > 54$　　　　（$A > 23000$）　　　　（56）

将（56）式代入（51）式，得

$$F_5 > 0.0032029 + 54p_r \tag{57}$$

将（57）式代入（49）式，得

$$|N_B| > F_2\prod_{i=12}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right)\prod_{j=5}^{r}\left(\frac{p_j-3}{p_j}\right)+$$

$$\{0.0032029+54p_r\}\prod_{j=5}^{r}\left(\frac{p_j-3}{p_j}\right)>$$

$$F_2\prod_{i=12}^{26}\left(\frac{p_{i-2}}{p_i-3}\right)\prod_{j=5}^{r}\left(\frac{p_j-3}{p_j}\right) \tag{58}$$

已知，$p_j - 3 > p_{j-2}$　　　$j \geqslant 4$　　　　（59）

将（26）和（59）式代入（58）式，得

$$|N_B| > \left\{\frac{|N|}{210}+\frac{p_5+p_r}{105}\right\}\prod_{i=5}^{11}\left(\frac{p_i-3}{p_i}\right)\prod_{j=12}^{r}\left(\frac{p_{j-2}}{p_j}\right) \tag{60}$$

将（1）和（2）式代入（60）式，得

$$|N_B| > \left\{\frac{p_r^{\ 2}-p_r}{210}+\frac{p_5+p_r}{105}\right\}\left\{\frac{(p_{10}-3)(p_{11}-3)}{p_{r-1}p_r}\right\}\prod_{i=5}^{9}\left(\frac{p_i-3}{p_i}\right) \tag{61}$$

将 $p_5 = 11$，$p_6 = 13$，$p_7 = 17$，$p_8 = 19$，$p_9 = 23$，$p_{10} = 29$，$p_{11} = 31$ 代入（61）式，可得

$$|N_B| > \left\{\frac{p_r^{\ 2}-p_r}{210}+\frac{2(p_5+p_r)}{210}\right\}\left(\frac{728}{p_r p_{r-1}}\right)\left(\frac{358400}{1062347}\right)=$$

$$\left(\frac{p_r^{\ 2}}{210}+\frac{p_r}{210}+\frac{22}{210}\right)\left(\frac{260915200}{1062347p_r p_{r-1}}\right) \tag{62}$$

已知　$p_r \geqslant p_{r-1}+2$　故得

$$|N_B| > (\frac{p_r p_{r-1} + 2p_r + p_r + 22}{210})(\frac{260915200}{1062347 p_r p_{r-1}}) =$$

$$\frac{260915200}{223092870} + (\frac{3p_r + 22}{210})(\frac{260915200}{1062347 p_r p_{r-1}}) =$$

$$1.169 + 1.169(\frac{3p_r + 22}{p_r p_{r-1}}) \tag{63}$$

即得

$$|N_B| > 1.169 \tag{64}$$

9.1.2 通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一元素 x_0 再引入参量,

$$x_6 = x_0 - 6 \tag{65}$$

$$x_{12} = x_0 - 12 \tag{66}$$

由其定义可知

$$x_0 \in E, \quad x_0 > 1 \tag{67}$$

$$x_6 \in E, \quad x_6 > 1 \tag{68}$$

$$x_{12} \in E, \quad x_{12} > 1 \tag{69}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组:

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$x_6 \equiv x_{6i} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$x_{12} \equiv x_{12i} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

由于 $x_0 \in N_B$，根据筛选条件（3），（4），（5），（6），（7），（8），（9）式可知

$$x_{0i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{70}$$

$$x_{0i} \neq 6 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{71}$$

$$x_{0i} \neq 12 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{72}$$

依据同余式的性质，从（65），（66）式可得

$$x_{6i} \equiv x_{0i} - 6 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \qquad (73)$$

$$x_{12i} \equiv x_{0i} - 12 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \qquad (74)$$

由（71）和（73）式，可知

$$x_{6i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \qquad (75)$$

由（72）和（74）式，可知

$$x_{12i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \qquad (76)$$

根据第一章引理3，由（67）式和（70）式可知，x_0 为奇素数。

根据第一章引理3，由（68）式和（75）式可知，x_6 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（69）式和（76）式可知，x_{12} 为奇素数。

由（65）和（66）式可得，

$$x_0 - x_6 = 6, \qquad x_6 - x_{12} = 6 \qquad (77)$$

由此可见，x_0，x_6，x_{12} 构成奇素数等差级数，再引入参量，

$$x_k = x_0 - k, \qquad k = 1,2,3,4,5,7,8,9,10,11 \qquad (78)$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

依据同余式的性质，由（78）式可得

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \qquad (79)$$

$$k = 1,2,3,4,5,7,8,9,10,11$$

当 $i = 1$ 时，

$$x_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \qquad (80)$$

由于 $p_1 = 2$，对于部分 k 值应有下面的等式：

$$k_1 = 1, \qquad k = 1,3,5,7,9,11 \tag{81}$$

由筛选条件（3）式可知

$$x_{01} = 1 \tag{82}$$

由（80），（81）和（82）式可知

$$x_{k1} = 0, \quad k = 1,3,5,7,9,11 \tag{83}$$

（83）式表示，x_k（$k = 1,3,5,7,9,11$）为复合数。

当 $i = 2$ 时，$p_2 = 3$，

$$x_{k2} \equiv x_{02} - k_2 \pmod{p_2} \tag{84}$$

$$k_2 = 2, \quad k = 2,8 \tag{85}$$

由筛选条件（4）式可知

$$x_{02} = 2 \tag{86}$$

由（84），（85）和（86）式可知

$$x_{k2} = 0, \qquad k = 2,8 \tag{87}$$

（87）式表示，x_k（$k = 2,8$）为复合数。

当 $i = 3$ 时，$p_3 = 5$

$$x_{k3} \equiv x_{03} - k_3 \pmod{p_3} \tag{88}$$

$$k_3 = 4, \qquad k = 4 \tag{89}$$

由筛选条件（5）式可知

$$x_{03} = 4 \tag{90}$$

由（88），（89）和（90）式可知

$$x_{k3} = 0, \qquad k = 4 \tag{91}$$

（91）式表示，x_k（$k = 4$）为复合数。

当 $i = 4$ 时，$p_4 = 7$

$$x_{k4} \equiv x_{04} - k_4 \pmod{p_4} \tag{92}$$

$$k_4=3\,,\qquad k=10 \tag{93}$$

由筛选条件（6）式可知，

$$x_{04}=3 \tag{94}$$

由（92），（93）和（94）式可知

$$x_{k4}=0\,,\qquad k=10 \tag{95}$$

（95）式表示，$x_k(k=10)$为复合数。

综上可知，由（83），（87），（91）和（95）式决定了$x_k(k=1,2,3,4,5,7,8,9,10,11)$全是复合数。由（78）式可知，这10个复合数正是介于x_0和x_6之间及x_6和x_{12}之间的10个整数。所以x_0，x_6，x_{12}为三个相邻的素数,结合（77）式得知：x_0,x_6,x_{12}为三个相邻素数组成的等差级数，

由（70），（75）和（76）式可知,这三个素数都大于p_r。根据定义，p_r为不超过$A^{1/2}$的最大素数，故大于p_r的素数必定大于$A^{1/2}$。

这样一来，由（64）式可得出结论：对于大于23000的正整数A而言，在区间$(A^{1/2},A)$内至少有2组“三个相邻素数构成的等差级数”。

9.2　相邻三素数等差级数的无限性

根据前节的结论，在区间$(A^{1/2},A)$ $(A>23000)$内至少有2组“三个相邻素数构成的等差级数”。同理，在区间(A,A^2)内同样至少有2组“三个相邻素数构成的等差级数”，在区间(A^2,A^4)内还至少有2组“三个相邻素数构成的等差级数”……依次类推，当A的指数趋向无穷时，“三个相邻素数构成的等差级数”必定有无穷多组。

9.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等差三素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno（）{
    var a=form1.a.value;
    if（a==""||a==null）{
        alert（"请输入一个数字（20000 以上）！"）;
        return;
    }else if（parseInt（a）<20000）{
        alert（"输入的数字必须大于 20000！"）;
        return;
    }form1.submit（）;
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
相邻等差三素数求解程序</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
```

```
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较长，请耐心等待！</p>
  <form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
    <table width="500" border="0" align="center" cellpadding="5" cellspacing="0">
      <tr>
        <td width="202" align="right">请输入一个数字（20000以上）：</td>
        <td width="278"><input name="a" type="text" id="a"></td>
        </tr>
        <tr>
          <td align="center" colspan="2"><input type="button" name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno（）;">
               
            <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
      </tr>
    </table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng（request.form（"a"））
%>
<html>
```

```
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等差三素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size=
"4"><strong>如果出现提示“……是否取消该脚本？”，请点击
“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>相邻等差三素数求解运算结
果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array（）;
var array_pi = new Array（）;
//var array_pi2 = new Array（）;
var array_a = new Array（）;
//var array_ai = new Array（）;
//var array_hi = new Array（）;
//var array_pi_ni = new Array（）
//a=clng（request.form（"a"））
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt（"<%=a%>"）;
if （a<20000）
{
    document.write（"输入错误！"）;
```

```
}else{
document.write（"<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a 为:
</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>"）;
//n=parseInt（a/2）;
//alert（n）;
pr=Math.sqrt（a）;
pr=parseInt（pr）;
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert（pr）;
for（pi=2;pi<=pr;pi++）
{//alert（array_pi[i]）;
            flag=1;
            for（j=2;j<=（pi/2）;j++）
            {
                if（pi%j==0）
                {
                     flag=0;
                     break;
                }
            }
            if（flag==1）
            {
                //ni=n%pi;
                //array_ni[i]=ni;
                array_pi[i]=pi;
```

```
            //array_pi2[i]=pi;
            //array_ai[i]=a%pi;
            //array_pi_ni[i]=pi-ni
            //if (i<6)
            //alert (array_pi[i]) ;
            //document.write (array_pi[i]+" ") ;
            i++;
        }
}
//document.write ("<br>") ;
//alert (array_pi[i-1]) ;
ther=i;
//alert (a-array_pi[ther-1]) ;

for (i= (array_pi[ther-1]+1) ,j=0;i<=a;i++,j++) {
        array_a[j]=i;
        //if (i<450)
        //alert (array_a[i]) ;
        //document.write (array_a[i]+" ") ;
        //alert (array_n[i]) ;
}//alert (array_a.length) ;
//document.write ("<br>") ;
theflag=0;
for (i=0;i<array_a.length;i++)
{
        theflag=0;
        if ( ( array_a[i]%array_pi[0]==1 ) &&
 (array_a[i]%array_pi[1]==2) && (array_a[i]%array_pi[2]==4)
&& (array_a[i]%array_pi[3]==3)) {
```

```
                //alert ( array_pi[0]+" "+array_pi[1]+" "+array_pi[2]+" "+array_pi[3]);
                //alert (array_a[i]);
                theflag=1;
            }
            if (theflag==1) {
                for (k=4;k<array_pi.length;k++) {
                    if ( ( array_a[i]%array_pi[k]==0 ) || (array_a[i]%array_pi[k]==6 ) || ((array_a[i]%array_pi[k] ) == (12%array_pi[k]))) {
                        array_a[i]=0;
                        break;
                    }
                }
            }else{
                array_a[i]=0;
            }
}
x=0;
for (i=0;i<array_a.length;i++) {
            if (array_a[i]>0) {
                //document.write (array_a[i]+" ");
                x++;
            }
            //alert (array_n[i]);
}

document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合N中求得的相邻等差三素数的组数为：</font>" + x + "<br>");
```

```
if（x>0）{
        document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的相邻等差三素数为：</font><br>")；
        var astr=new String（a）；
        var thelength=astr.length;
        var x11,x22,x33;
        m=1;
        for（i=0;i<array_a.length;i++）
        {
            switch（array_a[i]）
            {
                case 0: break;
              default:
                    x1=array_a[i];
                    x2=array_a[i]-6;
                    x3=array_a[i]-12;

                    x11=new String（x1）；
                    for（var iii=x11.length;iii<thelength;iii++）{
                            x11="0"+""+x11;
                    }
                    x22=new String（x2）；
                    for（var iii=x22.length;iii<thelength;iii++）{
                            x22="0"+""+x22;
                    }
                    x33=new String（x3）；
                    for（var iii=x33.length;iii<thelength;iii++）{
                            x33="0"+""+x33;
                    }
```

```
                    document.write          (           "<font
size='4'>x</font>1="+x33+"  <font
size='4'>x</font>2="+x22+"  <font
size='4'>x</font>3="+x11+"；     "）；
                    if（m%2==0）
                    {
                      document.write（"<br>"）；

                    }
                     m=m+1;
               }

          }
}


document.all（"wait_div"）.style.display="none";
document.all（"wait2_div"）.style.display="";
}
</script>
</p></body>
</html>
```

9.4　实筛数据

输入的数 a 为：20000

从集合 N 中求得的相邻等差三素数的组数为：10

从集合 N 中求得的相邻等差三素数为：

$x1$=00257　$x2$=00263　$x3$=00269

$x1$=01097　$x2$=01103　$x3$=01109

$x1$=05297　$x2$=05303　$x3$=05309

$x1$=07817 $x2$=07823 $x3$=07829
$x1$=12647 $x2$=12653 $x3$=12659
$x1$=14537 $x2$=14543 $x3$=14549
$x1$=14747 $x2$=14753 $x3$=14759
$x1$=15797 $x2$=15803 $x3$=15809
$x1$=16217 $x2$=16223 $x3$=16229
$x1$=17477 $x2$=17483 $x3$=17489

输入的数 a 为：100000
从集合 N 中求得的相邻等差三素数的组数为：29
从集合 N 中求得的相邻等差三素数为：
$x1$=001097 $x2$=001103 $x3$=001109
$x1$=005297 $x2$=005303 $x3$=005309
$x1$=007817 $x2$=007823 $x3$=007829
$x1$=012647 $x2$=012653 $x3$=012659
$x1$=014537 $x2$=014543 $x3$=014549
$x1$=014747 $x2$=014753 $x3$=014759
$x1$=015797 $x2$=015803 $x3$=015809
$x1$=016217 $x2$=016223 $x3$=016229
$x1$=017477 $x2$=017483 $x3$=017489
$x1$=024407 $x2$=024413 $x3$=024419
$x1$=025457 $x2$=025463 $x3$=025469
$x1$=025667 $x2$=025673 $x3$=025679
$x1$=026717 $x2$=026723 $x3$=026729
$x1$=027767 $x2$=027773 $x3$=027779
$x1$=029867 $x2$=029873 $x3$=029879
$x1$=035747 $x2$=035753 $x3$=035759
$x1$=039107 $x2$=039113 $x3$=039119
$x1$=042677 $x2$=042683 $x3$=042689
$x1$=047297 $x2$=047303 $x3$=047309
$x1$=054437 $x2$=054443 $x3$=054449

$x1$=062207 $x2$=062213 $x3$=062219
$x1$=062627 $x2$=062633 $x3$=062639
$x1$=076907 $x2$=076913 $x3$=076919
$x1$=078167 $x2$=078173 $x3$=078179
$x1$=078797 $x2$=078803 $x3$=078809
$x1$=082787 $x2$=082793 $x3$=082799
$x1$=082997 $x2$=083003 $x3$=083009
$x1$=084047 $x2$=084053 $x3$=084059
$x1$=093077 $x2$=093083 $x3$=093089

输入的数 a 为：200000

从集合 N 中求得的相邻等差三素数的组数为：58
从集合 N 中求得的相邻等差三素数为：
$x1$=001097 $x2$=001103 $x3$=001109
$x1$=005297 $x2$=005303 $x3$=005309
$x1$=007817 $x2$=007823 $x3$=007829
$x1$=012647 $x2$=012653 $x3$=012659
$x1$=014537 $x2$=014543 $x3$=014549
$x1$=014747 $x2$=014753 $x3$=014759
$x1$=015797 $x2$=015803 $x3$=015809
$x1$=016217 $x2$=016223 $x3$=016229
$x1$=017477 $x2$=017483 $x3$=017489
$x1$=024407 $x2$=024413 $x3$=024419
$x1$=025457 $x2$=025463 $x3$=025469
$x1$=025667 $x2$=025673 $x3$=025679
$x1$=026717 $x2$=026723 $x3$=026729
$x1$=027767 $x2$=027773 $x3$=027779
$x1$=029867 $x2$=029873 $x3$=029879
$x1$=035747 $x2$=035753 $x3$=035759
$x1$=039107 $x2$=039113 $x3$=039119

$x1$=042677 $x2$=042683 $x3$=042689
$x1$=047297 $x2$=047303 $x3$=047309
$x1$=054437 $x2$=054443 $x3$=054449
$x1$=062207 $x2$=062213 $x3$=062219
$x1$=062627 $x2$=062633 $x3$=062639
$x1$=076907 $x2$=076913 $x3$=076919
$x1$=078167 $x2$=078173 $x3$=078179
$x1$=078797 $x2$=078803 $x3$=078809
$x1$=082787 $x2$=082793 $x3$=082799
$x1$=082997 $x2$=083003 $x3$=083009
$x1$=084047 $x2$=084053 $x3$=084059
$x1$=093077 $x2$=093083 $x3$=093089
$x1$=101267 $x2$=101273 $x3$=101279
$x1$=101477 $x2$=101483 $x3$=101489
$x1$=103997 $x2$=104003 $x3$=104009
$x1$=110927 $x2$=110933 $x3$=110939
$x1$=111767 $x2$=111773 $x3$=111779
$x1$=114077 $x2$=114083 $x3$=114089
$x1$=115757 $x2$=115763 $x3$=115769
$x1$=121007 $x2$=121013 $x3$=121019
$x1$=122267 $x2$=122273 $x3$=122279
$x1$=127727 $x2$=127733 $x3$=127739
$x1$=128147 $x2$=128153 $x3$=128159
$x1$=131927 $x2$=131933 $x3$=131939
$x1$=137387 $x2$=137393 $x3$=137399
$x1$=139697 $x2$=139703 $x3$=139709
$x1$=143477 $x2$=143483 $x3$=143489
$x1$=146837 $x2$=146843 $x3$=146849
$x1$=150197 $x2$=150203 $x3$=150209
$x1$=152717 $x2$=152723 $x3$=152729
$x1$=163847 $x2$=163853 $x3$=163859

$x1=168887$ $x2=168893$ $x3=168899$
$x1=169307$ $x2=169313$ $x3=169319$
$x1=174137$ $x2=174143$ $x3=174149$
$x1=179807$ $x2=179813$ $x3=179819$
$x1=183377$ $x2=183383$ $x3=183389$
$x1=185057$ $x2=185063$ $x3=185069$
$x1=186107$ $x2=186113$ $x3=186119$
$x1=187367$ $x2=187373$ $x3=187379$
$x1=189467$ $x2=189473$ $x3=189479$
$x1=194717$ $x2=194723$ $x3=194729$

第十章 相邻等差四素数

四个相邻素数构成的等差级数是否有无穷多组？是个尚待解决的问题。就此问题，讨论如下。

10.1 求解证明

设 A 为大于 500000 的正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\dots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\dots<p_r\leqslant A^{1/2} \quad (1)$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示，$N=(p_r+1,p_r+2,\dots,A)$ 则基数 $|N|$ 为：

$$|N|=A-p_r \quad (2)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g\equiv 1 \pmod{p_1} \quad (3)$$

$$g\equiv 2 \pmod{p_2} \quad (4)$$

$$g\equiv 4 \pmod{p_3} \quad (5)$$

$$g\equiv 3 \pmod{p_4} \quad (6)$$

$$g\equiv 5 \pmod{p_5} \quad (7)$$

$$g\not\equiv 0 \pmod{p_i}, \qquad i=6,7,\dots,r \quad (8)$$

$$g\not\equiv 6 \pmod{p_i}, \qquad i=6,7,\dots,r \quad (9)$$

$$g \neq 12 \pmod{p_i}, \qquad i = 6,7,\ldots,r \tag{10}$$

$$g \neq 18 \pmod{p_i}, \qquad i = 6,7,\ldots,r \tag{11}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合筛选条件（3），（4），…，（11）式的所有元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

10.1.1　求证筛函数的下界

已知，被筛集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数，根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{12}$$

根据第一章中给出的（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N|\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{p_i}{|N|}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{13}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数，下面具体确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时，由（3）式可知，只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_1 = 1 \tag{14}$$

当 $i=2$ 时，由（4）式可知，只有模 p_2 的“2 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_2 = 1 \tag{15}$$

当$i=3$时，由（5）式可知，只有模p_3的“4 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_3=1 \tag{16}$$

当$i=4$时，由（6）式可知，只有模p_4的“3 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_4=1 \tag{17}$$

当$i=5$时，由（7）式可知，只有模p_5的“5 同余类子集”符合筛选条件，故得

$$\alpha_5=1 \tag{18}$$

当$i>5$时，$p_i \geqslant p_6=13$

数组 0，6，12，18 中元素每两两之间对所有$p_i\ (i>5)$皆不同余。所以，筛选条件（8），（9），（10），（11）式对应于四个不同的同余类子集，由此知，集合N中模p_i的“0 同余类子集”“6 同余类子集”“12 同余类子集”和“与 18 同余的同余类子集”共四个同余类子集不符合筛选条件，其余(p_i-4)个模p_i的同余类子集都能符合筛选条件，故得

$$\alpha_i=p_i-4\,,\qquad i=6,7,\dots,r \tag{19}$$

将（14），（15），…，（19）式代入（12）式，可得

$$|N_B|=|N|\prod_{i=1}^{5}(\frac{1}{p_i})\prod_{j=6}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{20}$$

将（14），（15），…，（19）式代入（13）式，可得

$$|N_B|>F_1|N|\prod_{i=1}^{5}(\frac{1}{p_i})\prod_{j=6}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{21}$$

$$F_1=\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{|N|})>1-\frac{1}{|N|}\sum_{i=1}^{r}p_i \tag{22}$$

由第一章（77）式可以推得

$$\Pi(x)-\Pi(\frac{x}{2})<\Pi(\frac{x}{2}) \tag{23}$$

由（23）式知，数值越大的区域素数分布的密度越小，故得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i=17+\sum_{i=5}^{r}p_i<17+(\frac{1}{2})(p_5+p_r)\{\Pi(p_r)-4\} \tag{24}$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r)<(6\ln 2)\frac{p_r}{\ln p_r} \tag{25}$$

将（25）式代入（24）式，可得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i<17-2(p_5+p_r)+\frac{(6\ln 2)p_r(p_5+p_r)}{2\ln p_r} \tag{26}$$

将（26）式代入（22）式，得

$$F_1>1+\frac{2(p_5+p_r)}{|N|}-\{\frac{17}{|N|}+\frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{|N|\ln p_r}\} \tag{27}$$

将（27）式代入（21）式，得

$$|N_B|>F_2\prod_{j=6}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j})-F_3\prod_{j=6}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{28}$$

$$F_2=\frac{|N|}{2310}+\frac{2(p_5+p_r)}{2310} \tag{29}$$

$$F_3=\frac{17}{2310}+\frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{2310\ln p_r} \tag{30}$$

将 F_2 作以下变换

$$F_2=F_2\{p_{49}/(p_{51}-4)\}+2F_2/(p_{51}-4) \tag{31}$$

$$F_2=F_2\{p_{50}/(p_{52}-4)\}+6F_2/(p_{52}-4) \tag{32}$$

$$F_2=F_2\{p_{51}/(p_{53}-4)\}+4F_2/(p_{53}-4) \tag{33}$$

$$F_2 = F_2\{p_{52}/(p_{54}-4)\} + 8F_2/(p_{54}-4) \tag{34}$$

$$F_2 = F_2\{p_{53}/(p_{55}-4)\} + 12F_2/(p_{55}-4) \tag{35}$$

$$F_2 = F_2\{p_{54}/(p_{56}-4)\} + 8F_2/(p_{56}-4) \tag{36}$$

$$F_2 = F_2\{p_{55}/(p_{57}-4)\} + 8F_2/(p_{57}-4) \tag{37}$$

$$F_2 = F_2\{p_{56}/(p_{58}-4)\} + 4F_2/(p_{58}-4) \tag{38}$$

$$F_2 = F_2\{p_{57}/(p_{59}-4)\} + 4F_2/(p_{59}-4) \tag{39}$$

$$F_2 = F_2\{p_{58}/(p_{60}-4)\} + 6F_2/(p_{60}-4) \tag{40}$$

$$F_2 = F_2\{p_{59}/(p_{61}-4)\} + 2F_2/(p_{61}-4) \tag{41}$$

$$F_2 = F_2\{p_{60}/(p_{62}-4)\} + 8F_2/(p_{62}-4) \tag{42}$$

$$F_2 = F_2\{p_{61}/(p_{63}-4)\} + 20F_2/(p_{63}-4) \tag{43}$$

$$F_2 = F_2\{p_{62}/(p_{64}-4)\} + 14F_2/(p_{64}-4) \tag{44}$$

$$F_2 = F_2\{p_{63}/(p_{65}-4)\} + 2F_2/(p_{65}-4) \tag{45}$$

将（31）~（45）逐次代入右端第一项可得

$$F_2 = F_2\prod_{i=51}^{65}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}) + F_4 \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
F_4 = {} & (\frac{2F_2}{p_{51}-4})\prod_{i=52}^{65}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}) + (\frac{6F_2}{p_{52}-4})\prod_{i=53}^{65}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}) + \\
& \{\frac{4F_2}{p_{53}-4}\}\prod_{i=54}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\} + \{\frac{8F_2}{p_{54}-4}\}\prod_{i=55}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\} + \\
& \{\frac{12F_2}{p_{55}-4}\}\prod_{i=56}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\} + \{\frac{8F_2}{p_{56}-4}\}\prod_{i=57}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\} + \\
& \{\frac{8F_2}{p_{57}-4}\}\prod_{i=58}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\} + \{\frac{4F_2}{p_{58}-4}\}\prod_{i=59}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\} + \\
& \{\frac{4F_2}{p_{59}-4}\}\prod_{i=60}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\} + \{\frac{6F_2}{p_{60}-4}\}\prod_{i=61}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\} +
\end{aligned}$$

$$\{\frac{2F_2}{p_{61}-4}\}\prod_{i=62}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\}+\{\frac{8F_2}{p_{62}-4}\}\prod_{i=63}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\}+$$

$$\{\frac{20F_2}{p_{63}-4}\}\prod_{i=64}^{65}\{\frac{p_{i-2}}{p_i-4}\}+$$

$$\{\frac{14F_2}{p_{64}-4}\}\{\frac{p_{63}}{p_{65}-4}\}+\{\frac{2F_2}{p_{65}-4}\} \tag{47}$$

将 $p_{50}=229$，$p_{51}=233$，$p_{52}=239$，$p_{53}=241$，$p_{54}=251$，$p_{55}=257$，$p_{56}=263$，$p_{57}=269$，$p_{58}=271$，$p_{59}=277$，$p_{60}=281$，$p_{61}=283$，$p_{62}=293$，$p_{63}=307$，$p_{64}=311$，$p_{65}=313$，代入（47）式，可得

$$F_4=0.332F_2 \tag{48}$$

将（48）代入（46）式，得

$$F_2=F_2\prod_{i=51}^{65}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+0.332F_2 \tag{49}$$

将（49）代入（28）式，可得

$$|N_B|>F_2\prod_{i=51}^{65}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})\prod_{j=6}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j})+F_5\prod_{j=6}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{50}$$

$$F_5=0.332F_2-F_3=\frac{0.332|N|}{2310}+\frac{0.664(p_5+p_r)}{2310}-$$

$$\frac{17}{2310}-\frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{2310\ln p_r} \tag{51}$$

由（1）式和（2）式知

$$|N|\geqslant p_r{}^2-p_r \tag{52}$$

将（52）式代入（51）式，得

$$F_5\geqslant F_6p_r-0.0042 \tag{53}$$

$$F_6=\frac{0.332(p_r-1)}{2310}+\frac{0.664}{2310}-\frac{2.08(p_5+p_r)}{2310\ln p_r}=$$

$$\frac{0.332}{2310}+\frac{0.332p_r}{2310}-\frac{2.08(p_5+p_r)}{2310\ln p_r} \tag{54}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_6}{\mathrm{d}p_r}=\frac{0.332}{2310}-(\frac{2.08}{2310})\{\frac{\ln p_r-(p_5+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\}=$$

$$\frac{0.332}{2310}-\frac{2.08}{2310\ln p_r}+\frac{2.08(p_5+p_r)}{2310p_r\ln^2 p_r}>$$

$$\frac{0.332}{2310}-\frac{2.08}{2310\ln p_r} \tag{55}$$

令 $\frac{0.332}{2310}-\frac{2.08}{2310\ln p_r}>0$

得 $p_r>525.8$ （56）

将条件（56）式代入（55）式，可得

$$\frac{\mathrm{d}F_6}{\mathrm{d}p_r}>0 \qquad p_r>525.8 \tag{57}$$

由（57）式知，当 $p_r>525.8$ 时，F_6 为 p_r 的递增函数，

当 A≥500000 时，$p_r \geqslant 701>525.8$

而且，$F_6(p_r=701)=0.003035$

故知，$F_6 \geqslant 0.003035$，（A≥500000） （58）

将（58）代入（53）式，得

$$F_5 \geqslant 0.003035\times701-0.0042$$

$$=2.123 \qquad (A\geqslant500000) \tag{59}$$

将（59）代入（50）式，得

$$|N_B|>F_2\prod_{i=51}^{65}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})\prod_{j=6}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{60}$$

将（29）和（52）代入（60）式。可得，

$$|N_B| > \{\frac{p_r^{\ 2} - p_r}{2310} + \frac{2(p_5 + p_r)}{2310}\}\prod_{i=51}^{65}(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4})\prod_{j=6}^{r}(\frac{p_j - 4}{p_j}) \tag{61}$$

已知，$p_j - 4 \geqslant p_{j-2} \qquad j > 65$　　（62）

（62）式代入（61）式，得

$$|N_B| > \{\frac{p_r^{\ 2} - p_r}{2310} + \frac{2(p_5 + p_r)}{2310}\}\prod_{j=6}^{50}(\frac{p_j - 4}{p_j})\prod_{i=51}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i}) =$$

$$\{\frac{p_r^{\ 2}}{2310} + \frac{22 + p_r}{2310}\}\{\prod_{j=6}^{48}(\frac{p_j - 4}{p_j})\}\{\frac{(p_{49} - 4)(p_{50} - 4)}{p_{r-1}p_r}\} =$$

$$\{\frac{p_r^{\ 2} + p_r + 22}{p_{r-1}p_r}\}\{\frac{(p_{49} - 4)(p_{50} - 4)}{2310}\}\prod_{j=6}^{48}(\frac{p_j - 4}{p_j}) >$$

$$\{\frac{(p_{49} - 4)(p_{50} - 4)}{2310}\}\prod_{j=6}^{48}(\frac{p_j - 4}{p_j}) \tag{63}$$

将 $p_6, p_7 \dots, p_{50}$ 的数值代入（63）式，可得

$$|N_B| > 1.118 \tag{64}$$

10.1.2　通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一个元素 x_0，再引入参量：

$$x_6 = x_0 - 6 \tag{65}$$

$$x_{12} = x_0 - 12 \tag{66}$$

$$x_{18} = x_0 - 18 \tag{67}$$

由其定义可知

$$x_0 \in E，\ x_0 > 1 \tag{68}$$

$$x_6 \in E，\ x_6 > 1 \tag{69}$$

$$x_{12} \in E，\ x_{12} > 1 \tag{70}$$

$$x_{18} \in E，\ x_{18} > 1 \tag{71}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组，

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{72}$$

$$x_6 \equiv x_{6i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{73}$$

$$x_{12} \equiv x_{12i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{74}$$

$$x_{18} \equiv x_{18i} \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{75}$$

由于 $x_0 \in N_B$ 根据筛选条件（3），（4）…（11）式可知

$$x_{0i} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{76}$$

$$x_{0i} \not\equiv 6 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{77}$$

$$x_{0i} \not\equiv 12 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{78}$$

$$x_{0i} \not\equiv 18 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{79}$$

依据同余式的性质，由（65），（66），（67）式可得

$$x_{6i} \equiv x_{0i} - 6 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{80}$$

$$x_{12i} \equiv x_{0i} - 12 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{81}$$

$$x_{18i} \equiv x_{0i} - 18 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{82}$$

由（77）和（80）式，可知

$$x_{6i} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{83}$$

由（78）和（81）式，可知

$$x_{12i} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{84}$$

由（79）和（82）式，可知

$$x_{18i} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{85}$$

根据第一章引理 3，由（68）和（76）式可知，x_0 为奇素数
根据第一章引理 3，由（69）和（83）式可知，x_6 为奇素数
根据第一章引理 3，由（70）和（84）式可知，x_{12} 为奇素数
根据第一章引理 3，由（71）和（85）式可知，x_{18} 为奇素数

由（65），（66）和（67）式，可得

$$x_0 - x_6 = 6 \tag{86}$$

$$x_6 - x_{12} = 6 \tag{87}$$

$$x_{12} - x_{18} = 6 \tag{88}$$

可见，x_0，x_6，x_{12}，x_{18}构成奇素数等差级数。再引入参量：$x_k = x_0 - k$，$k = 1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17$　（89）

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

依据同余式的性质，由（89）式可知

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i} \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{90}$$

$$k = 1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17$$

当$i = 1$时，$p_1 = 2$

$$x_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \tag{91}$$

$$k_1 = 1, \quad k = 1,3,5,7,9,11,13,15,17 \tag{92}$$

由筛选条件（3）式可知

$$x_{01} = 1 \tag{93}$$

由（91），（92）和（93）式可知

$$x_{k1} = 0, \quad k = 1,3,5,7,9,11,13,15,17 \tag{94}$$

（94）式表示，$x_k\ (k = 1,3,5,7,9,11,13,15,17)$为复合数。

当$i = 2$时，$p_2 = 3$

$$x_{k2} \equiv x_{02} - k_2 \pmod{p_2} \tag{95}$$

$$k_2 = 2, \quad k = 2,8,14 \tag{96}$$

由筛选条件（4）式可知

$$x_{02} = 2 \tag{97}$$

由（95），（96）和（97）式可知

$$x_{k2}=0\,,\qquad k=2,8,14 \tag{98}$$

（98）式表示，$x_k\ (k=2,8,14)$ 为复合数。

当 $i=3$ 时， $p_3=5$

$$x_{k3}\equiv x_{03}-k_3\ (\mathrm{mod}\, p_3) \tag{99}$$

$$k_3=4\,,\quad k=4 \tag{100}$$

由筛选条件（5）式可知

$$x_{03}=4 \tag{101}$$

由（99），（100）和（101）式可知

$$x_{k3}=0\,,\qquad k=4 \tag{102}$$

（102）式表示，$x_k\ (k=4)$ 为复合数。

当 $i=4$ 时， $p_4=7$

$$x_{k4}\equiv x_{04}-k_4\ (\mathrm{mod}\, p_4) \tag{103}$$

$$k_4=3\,,\ k=10 \tag{104}$$

由筛选条件（6）式可知

$$x_{04}=3 \tag{105}$$

由（103），（104）和（105）式可知

$$x_{k4}=0\,,\qquad k=10 \tag{106}$$

（106）式表示，$x_k\ (k=10)$ 为复合数。

当 $i=5$ 时， $p_5=11$

$$x_{k5}\equiv x_{05}-k_5\ (\mathrm{mod}\, p_5) \tag{107}$$

$$k_5=5\,,\quad k=16 \tag{108}$$

由筛选条件（7）式可知

$$x_{05}=5 \tag{109}$$

由（107），（108）和（109）式可知

$$x_{k5}=0\text{，}\qquad k=16 \tag{110}$$

（110）式表示，$x_k\ (k=16)$ 为复合数。

综合（94)，（98)，（102）（106）和（110）式可知，参量 x_k（$k=1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17$）全是复合数。

由(89)式可知，这 15 个复合数正是介于 x_0 和 x_6 和 x_{12} 和 x_{18} 之间的 15 个整数。所以 x_0，x_6，x_{12}，x_{18} 为四个相邻的素数，结合（86)，（87)，（88）式可知

x_0，x_6，x_{12}，x_{18} 为四个相邻素数组成的等差级数。

由（76)，（83)，（84)，（85）式可知，这四个素数都大于 p_r，根据定义，p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数，故大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$，由此知这四个素数都大于 $A^{1/2}$。即是说，根据（64）式可得如下结论：

在区间 $(A^{1/2},A)\ (A>500000)$ 内至少有一组"四个相邻素数构成的等差级数"。

10.2　相邻四素数等差级数的无限性

根据前节所得结论，对于不小于 500000 的正整数 A 而言，在区间 $(A^{1/2},A)$ 内至少有一组"四个相邻素数构成的等差级数"。照此结论，在区间 (A,A^2) 内同样至少有一组"四个相邻素数构成的等差级数"，在区间 (A^2,A^4) 内也至少有一组"四个相邻素数构成的等差级数"……依次类推，当 A 的指数趋向无穷时，"四个相邻素数构成的等差级数"必定有无穷多组。

10.3　求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两

个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等差四素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno（）{
var a=form1.a.value;
if（a==""||a==null）{
    alert（"请输入一个数字（100000 以上）！"）;
    return;
}else if（parseInt（a）<100000）{
    alert（"输入的数字必须大于 100000！"）;
    return;
}form1.submit（）;
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
相邻等差四素数求解程序</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
```

```
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
  <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
    <tr>
      <td width="202" align="right">请输入一个数字（100000 以
上）：</td>
      <td width="278"><input name="a" type="text" id="a"> </td>
    </tr>
  <tr>
      <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
           
        <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
    </tr>
  </table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng（request.form（"a"））
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;
charset=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
```

```
<title>相邻等差四素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font color="#FF0000" size="5"><strong>相邻等差四素数求解运算结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array（）；
var array_pi = new Array（）；
//var array_pi2 = new Array（）；
var array_a = new Array（）；
//var array_ai = new Array（）；
//var array_hi = new Array（）；
//var array_pi_ni = new Array（）
//a=clng（request.form（"a"））
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt（"<%=a%>"）；
if （a<20000）
{
    document.write（"输入错误！"）；
}else{
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数a为：</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>"）；
```

```
//n=parseInt（a/2）;
//alert（n）;
pr=Math.sqrt（a）;
pr=parseInt（pr）;
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert（pr）;
for（pi=2;pi<=pr;pi++）
{//alert（array_pi[i]）;
 flag=1;
 for（j=2;j<=（pi/2）;j++）
 {
      if（pi%j==0）
      {
           flag=0;
           break;
      }
 }
 if（flag==1）
 {
      //ni=n%pi;
      //array_ni[i]=ni;
      array_pi[i]=pi;
      //array_pi2[i]=pi;
      //array_ai[i]=a%pi;
      //array_pi_ni[i]=pi-ni
      //if（i<6）
```

```
        //alert（array_pi[i]）;
        //document.write（array_pi[i]+" "）;
        i++;
     }
    }
    //document.write（"<br>"）;
    //alert（array_pi[i-1]）;
    ther=i;
    //alert（a-array_pi[ther-1]）;

    for（i=（array_pi[ther-1]+1）,j=0;i<=a;i++,j++）{
     array_a[j]=i;
     //if（i<450）
     //alert（array_a[i]）;
     //document.write（array_a[i]+" "）;
     //alert（array_n[i]）;
    }//alert（array_a.length）;
    //document.write（"<br>"）;
    theflag=0;
    for（i=0;i<array_a.length;i++）
    {
     theflag=0;
     if  （  （  array_a[i]%array_pi[0]==1  ）  &&
（array_a[i]%array_pi[1]==2）&&（array_a[i]%array_pi[2]==4）
&&（array_a[i]%array_pi[3]==3）&&（array_a[i]%array_pi[4]==5））
{
        //alert （array_pi[0]+"  "+array_pi[1]+"  "+array_pi[2]+"
"+array_pi[3]）;
```

```
            //alert（array_a[i]）;
            theflag=1;
        }
        if（theflag==1）{
            for（k=5;k<array_pi.length;k++）{
                if  （  （  array_a[i]%array_pi[k]==0  ）  ||
（array_a[i]%array_pi[k]==6）||（（array_a[i]%array_pi[k]）==
（ 12%array_pi[k] ））  ||  （（ array_a[i]%array_pi[k] ）  ==
（18%array_pi[k]）））{
                    array_a[i]=0;
                    break;
                }
            }
        }else{
            array_a[i]=0;
        }
    }
    x=0;
    for（i=0;i<array_a.length;i++）{
     if（array_a[i]>0）{
            //document.write（array_a[i]+" "）;
            x++;
     }
     //alert（array_n[i]）;
    }

    document.write（"<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的相邻等差四素数的组数为：</font>" + x + "<br>"）;
    if（x>0）{
```

```
document.write（"<font color=#0000FF size=3>从集合 N 中求
得的相邻等差四素数为：</font><br>"）；
    var astr=new String（a）；
    var thelength=astr.length;
    var x11,x22,x33,x44;
    m=1;
    for（i=0;i<array_a.length;i++）
    {
        switch（array_a[i]）
        {
            case 0: break;
            default:
                    x1=array_a[i];
                    x2=array_a[i]-6;
                    x3=array_a[i]-12;
                    x4=array_a[i]-18;
                    x11=new String（x1）；
                    for（var iii=x11.length;iii<thelength;iii++）{
                            x11="0"+""+x11;
                    }
                    x22=new String（x2）；
                    for（var iii=x22.length;iii<thelength;iii++）{
                            x22="0"+""+x22;
                    }
                    x33=new String（x3）；
                    for（var iii=x33.length;iii<thelength;iii++）{
                            x33="0"+""+x33;
                    }
                    x44=new String（x4）；
                    for（var iii=x44.length;iii<thelength;iii++）{
```

```
                    x44="0"+""+x44;
                }
                  document.write          (          "<font
size='4'>x</font>1="+x44+"  <font
size='4'>x</font>2="+x33+"  <font
size='4'>x</font>3="+x22+"  <font
size='4'>x</font>4="+x11+"；    ")；
                  if（m%2==0）
                {
                  document.write（"<br>"）；

                }
                 m=m+1;
          }

    }
    }


    document.all（"wait_div"）.style.display="none";
    document.all（"wait2_div"）.style.display="";
    }
    </script>
    </p></body>
    </html>
```

10.4　实筛数据

输入的数 a 为：100000

从集合 N 中求得的相邻等差四素数的组数为：1

从集合 N 中求得的相邻等差四素数为

$x1$=078791　$x2$=078797　$x3$=078803　$x4$=078809

输入的数 a 为：150000

从集合 N 中求得的相邻等差四素数的组数为：2

从集合 N 中求得的相邻等差四素数为

$x1$=078791　$x2$=078797　$x3$=078803　$x4$=078809

$x1$=115751　$x2$=115757　$x3$=115763　$x4$=115769

输入的数 a 为：200000

从集合 N 中求得的相邻等差四素数的组数为：4

从集合 N 中求得的相邻等差四素数为

$x1$=078791　$x2$=078797　$x3$=078803　$x4$=078809

$x1$=115751　$x2$=115757　$x3$=115763　$x4$=115769

$x1$=185051　$x2$=185057　$x3$=185063　$x4$=185069

$x1$=187361　$x2$=187367　$x3$=187373　$x4$=187379

第十一章　相邻等距三孪生素数

关于“相邻等距三孪生素数”是否有无穷多组的问题，将在本章中进行讨论。

11.1　求解证明

设 A 为大于 250000 的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\ldots<p_r\le A^{1/2} \tag{1}$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示，$N=(p_r+1,p_r+2,\ldots,A)$ 则集合 N 的基数 $|N|$ 为

$$|N|=A-p_r\geqslant p_r{}^2-p_r \tag{2}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,p_1) \tag{3}$$

$$g\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,p_2) \tag{4}$$

$$g\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,p_3) \tag{5}$$

$$g\equiv 6\ (\mathrm{mod}\,p_4) \tag{6}$$

$$g\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p_i),\qquad i=5,6,\ldots,r \tag{7}$$

$$g\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,p_i),\qquad i=5,6,\ldots,r \tag{8}$$

$$g\not\equiv 12\ (\mathrm{mod}\,p_i),\qquad i=5,6,\ldots,r \tag{9}$$

$$g \not\equiv 14 \pmod{p_i}, \qquad i = 5,6,\ldots,r \tag{10}$$

$$g \not\equiv 24 \pmod{p_i}, \qquad i = 5,6,\ldots,r \tag{11}$$

$$g \not\equiv 26 \pmod{p_i}, \qquad i = 5,6,\ldots,r \tag{12}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（3），（4），…，（12）式条件的所有元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

11.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数，根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{13}$$

根据第一章的（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N|\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{p_i}{|N|}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{14}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体确定 α_i 的数值。

根据（3）式可知，按模数 p_1，集合 N 中只有模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件故得

$$\alpha_1 = 1 \tag{15}$$

根据（4）式可知，按模数 p_2，集合 N 中只有模 p_2 的“1 同余类子集”符合筛选条件故得

$$\alpha_2 = 1 \tag{16}$$

根据（5）式可知，按模数 p_3，集合 N 中只有模 p_3 的“3

同余类子集”符合筛选条件故得

$$\alpha_3 = 1 \tag{17}$$

根据（6）式可知，按模数p_4，集合 N 中只有模p_4的 “6同余类子集”符合筛选条件故得

$$\alpha_4 = 1 \tag{18}$$

当$i = 5$时，$p_5 = 11$

此时有$24 \equiv 2 \pmod{p_5}$。数 0，12，14，26 和 2 中每两两之间对模 p_5 皆不同余。根据（7)，(8)，…，(12）式可知,按模 p_5，集合 N 中只有$(p_5 - 5)$个模 p_5 的同余类子集符合筛选条件故得

$$\alpha_5 = (p_5 - 5) \tag{19}$$

当$i = 6$时，$p_6 = 13$

此时有$26 \equiv 0 \pmod{p_6}$。数组 0，2，12,14,24 中元素每两两之间对模 p_6 皆不同余。根据（7)，(8)，…，(12）式可知,按模 p_6,集合 N 中只有$(p_6 - 5)$个模 p_6 的同余类子集符合筛选条件故得

$$\alpha_6 = (p_6 - 5) \tag{20}$$

当$i > 6$时，$p_i \geqslant p_7 = 17$

数组 0,2,12,14,24,26 中元素每两两之间对模 $p_i (i = 7,8,\ldots,r)$ 皆不同余。根据（7)，(8)，…，(12）式可知，按模 p_i，集合 N 中只有$(p_i - 6)$个模 p_i 的同余类子集符合筛选条件故得

$$\alpha_i = (p_i - 6) \qquad i=7,8,\cdots,r \tag{21}$$

将（15)，(16)，…，(21）式代入（13）式得

$$|N_B| = |N|\left(\frac{1}{210}\right)\prod_{i=5}^{6}\left(\frac{p_i - 5}{p_i}\right)\prod_{j=7}^{r}\left(\frac{p_j - 6}{p_j}\right) \tag{22}$$

将（15)，(16)，…，(21）式代入（14）式得

$$|N_B| > |N| F_1(\frac{1}{210}) \prod_{i=5}^{6} (\frac{p_i - 5}{p_i}) \prod_{j=7}^{r} (\frac{p_j - 6}{p_j}) \tag{23}$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{p_i}{|N|}) \tag{24}$$

由（23）式得

$$|N_B| > F_1(\frac{8|N|}{5005}) \prod_{j=7}^{45} (\frac{p_j - 6}{p_j}) \prod_{i=46}^{r} (\frac{p_i - 6}{p_i}) \tag{25}$$

由（24）式得

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{p_i}{|N|}) > 1 - \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^{r} p_i \tag{26}$$

由第一章（77）式可以推得

$$\Pi(x) - \Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \tag{27}$$

（27）式表明，数值越大的区域素数分布的密度越小，由此可得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < (\frac{1}{2})(p_1 + p_r)\Pi(p_r) \tag{28}$$

由切比晓夫不等式可得

$$\Pi(p_r) < (6\ln 2)(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{29}$$

由（28），（29）式得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{30}$$

将（30）式代入（26）式，得

$$F_1 > 1 - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{|N| \ln p_r} \tag{31}$$

将（31）代入（25）式，得

$$|N_B| > (\frac{8|N|}{5005})\prod_{j=7}^{45}(\frac{p_j-6}{p_j})\prod_{i=46}^{r}(\frac{p_i-6}{p_i}) -$$

$$(\frac{(24\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{5005\ln p_r})\prod_{j=7}^{45}(\frac{p_j-6}{p_j})\prod_{i=46}^{r}(\frac{p_i-6}{p_i}) \tag{32}$$

将$|N|$作以下变换：

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{44}}{p_{46}-6}) \tag{33}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{45}}{p_{47}-6}) + \frac{8|N|}{p_{47}-6} \tag{34}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{46}}{p_{48}-6}) + \frac{18|N|}{p_{48}-6} \tag{35}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{47}}{p_{49}-6}) + \frac{10|N|}{p_{49}-6} \tag{36}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{48}}{p_{50}-6}) \tag{37}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{49}}{p_{51}-6}) \tag{38}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{50}}{p_{52}-6}) + \frac{4|N|}{p_{52}-6} \tag{39}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{51}}{p_{53}-6}) + \frac{2|N|}{p_{53}-6} \tag{40}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{52}}{p_{54}-6}) + \frac{6|N|}{p_{54}-6} \tag{41}$$

$$|N| = |N|\ (\frac{p_{53}}{p_{55}-6}) + \frac{10|N|}{p_{55}-6} \tag{42}$$

$$|N|=|N|\ (\frac{p_{54}}{p_{56}-6})+\frac{6|N|}{p_{56}-6} \tag{43}$$

$$|N|=|N|\ (\frac{p_{55}}{p_{57}-6})+\frac{6|N|}{p_{57}-6} \tag{44}$$

$$|N|=|N|\ (\frac{p_{56}}{p_{58}-6})+\frac{2|N|}{p_{58}-6} \tag{45}$$

$$|N|=|N|\ (\frac{p_{57}}{p_{59}-6})+\frac{2|N|}{p_{59}-6} \tag{46}$$

$$|N|=|N|\ (\frac{p_{58}}{p_{60}-6})+\frac{4|N|}{p_{60}-6} \tag{47}$$

$$|N|=|N|\ (\frac{p_{59}}{p_{61}-6}) \tag{48}$$

$$|N|=|N|\ (\frac{p_{60}}{p_{62}-6})+\frac{6|N|}{p_{62}-6} \tag{49}$$

$$|N|=|N|\ (\frac{p_{61}}{p_{63}-6})+\frac{18|N|}{p_{63}-6} \tag{50}$$

将（33）～（50）逐次代入右端第一项，得

$$|N|=|N|\prod_{i=46}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+F_2 \tag{51}$$

其中 F_2 为

$$F_2=(\frac{8|N|}{p_{47}-6})\prod_{i=48}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+(\frac{18|N|}{p_{48}-6})\prod_{i=49}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+$$

$$(\frac{10|N|}{p_{49}-6})\prod_{i=50}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+(\frac{4|N|}{p_{52}-6})\prod_{i=53}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+$$

$$(\frac{2|N|}{p_{53}-6})\prod_{i=54}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+(\frac{6|N|}{p_{54}-6})\prod_{i=55}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+$$

$$(\frac{10|N|}{p_{55}-6})\prod_{i=56}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+(\frac{6|N|}{p_{56}-6})\prod_{i=57}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+$$

$$(\frac{6|N|}{p_{57}-6})\prod_{i=58}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+(\frac{2|N|}{p_{58}-6})\prod_{i=59}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+$$

$$(\frac{2|N|}{p_{59}-6})\prod_{i=60}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+(\frac{4|N|}{p_{60}-6})\prod_{i=61}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+$$

$$(\frac{6|N|}{p_{62}-6})(\frac{p_{61}}{p_{63}-6})+\frac{18|N|}{p_{63}-6} \tag{52}$$

将 $p_{46}=199$，$p_{47}=211$，$p_{48}=223$，$p_{49}=227$，$p_{50}=229$，$p_{51}=233$，$p_{52}=239$，$p_{53}=241$，$p_{54}=251$，$p_{55}=257$，$p_{56}=263$，$p_{57}=269$，$p_{58}=271$，$p_{59}=277$，$p_{60}=281$，$p_{61}=283$，$p_{62}=293$，$p_{63}=307$ 代入（52）式可得

$$F_2=0.345|N| \tag{53}$$

将（53）式代入（51）式，得

$$|N|=|N|\prod_{i=46}^{63}(\frac{p_{i-2}}{p_i-6})+0.345|N| \tag{54}$$

将（54）式代入（32）式，得

$$|N_B|>|N|(\frac{1.183}{p_{44}p_{45}})\prod_{j=46}^{63}(\frac{p_{j-2}}{p_j-6})\prod_{i=46}^{r}\frac{p_i-6}{p_i}+$$

$$|N|(\frac{0.4081}{p_{44}p_{45}})\prod_{i=46}^{r}(\frac{p_i-6}{p_i})-$$

$$(\frac{(\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r})(\frac{3.549}{p_{44}p_{45}})\prod_{i=46}^{r}(\frac{p_i-6}{p_i}) \tag{55}$$

令　$$F_3=0.4081|N|-\frac{3.549(\ln 2)(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{56}$$

得 $$|N_B|>|N|(\frac{1.183}{p_{44}p_{45}})\prod_{j=46}^{63}(\frac{p_{j-2}}{p_j})\prod_{i=64}^{r}(\frac{p_i-6}{p_i})+$$

$$F_3(\frac{1}{p_{44}p_{45}})\prod_{i=46}^{r}(\frac{p_i-6}{p_i}) \tag{57}$$

将（2）式代入（56）式，得

$$F_3 \geqslant F_4 p_r \tag{58}$$

$$F_4=0.4081(p_r-1)-\frac{3.549(\ln 2)(p_1+p_r)}{\ln p_r} \tag{59}$$

$$\frac{dF_4}{dp_r}=0.4081-2.46\{\frac{\ln p_r-(p_1+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\}=$$

$$0.4081-\frac{2.46}{\ln p_r}+\frac{2.46(p_1+p_r)}{p_r\ln^2 p_r}>$$

$$0.4081-\frac{2.46}{\ln p_r} \tag{60}$$

令 $$0.4081-\frac{2.46}{\ln p_r}>0$$

得 $$p_r>414.9 \tag{61}$$

将条件（61）代入（60）式得

$$\frac{dF_4}{dp_r}>0 \qquad p_r>414.9 \tag{62}$$

（62）式表示当 $p_r>414.9$ 时，F_4 为 p_r 的递增函数。

当 $A\geqslant 250000$ 时，$p_r\geqslant 499>414.9$

而且 $F_4(p_r=499)=4.85$

故知，$F_4\geqslant 4.85$ （A≥250000） （63）

将（63）式代入（58）式，再将（58）代入（57）式得

$$|N_B|>|N|(\frac{1.183}{p_{44}p_{45}})\prod_{j=46}^{63}(\frac{p_{j-2}}{p_j})\prod_{i=64}^{r}(\frac{p_i-6}{p_i}) \tag{64}$$

根据第一章中（73）式可知：

$$\Pi(p_i)=\frac{p_i}{\ln p_i-1.08366} \tag{65}$$

$$\Pi(p_{i+1})=\frac{p_{i+1}}{\ln p_{i+1}-1.08366} \tag{66}$$

设在 p_i 处，相邻素数的平均间距为 $\varDelta_i$ 则得：

$$p_{i+1}=p_i+\varDelta_i \tag{67}$$

（66）和（65）式两端相减，可得：

$$1=\frac{p_i+\varDelta_i}{\ln(p_i+\varDelta_i)-1.08366}-\frac{p_i}{\ln p_i-1.08366}$$

通分移项可得

$$\{\ln(p_i+\varDelta_i)-1.08366\}\{\ln p_i-1.08366\}=$$

$$(p_i+\varDelta_i)\{\ln p_i-1.08366\}-p_i\{\ln(p_i+\varDelta_i)-1.08366\} \tag{68}$$

已知，$\ln(p_i+\varDelta_i)=\ln p_i+\ln(1+\frac{\varDelta_i}{p_i})$　（69）

将（69）式代入（68）式，可得

$$\ln(p_i+\varDelta_i)-1.08366=\varDelta_i-\frac{p_i\ln(1+\frac{\varDelta_i}{p_i})}{\ln p_i-1.08366} \tag{70}$$

由于　$\frac{p_i\ln(1+\frac{\varDelta_i}{p_i})}{\ln p_i-1.08366}>0 \qquad (p_i>10)$　（71）

得　$\varDelta_i>\ln p_{i+1}-1.08366$　（72）

令　$\ln p_{i+1}-1.08366>3$

得　$p_{i+1}>59.36$　（73）

将条件（73）式代入（72）式，可得

$\Delta_i > 3 \qquad p_{i+1} > 59.36$ （74）

已知 $p_{62} = 293 > 59.36$

故得 $\Delta_i > 3$ （$i \geqslant 61$） （75）

即有 $p_i - 6 \geqslant p_{i-2}$ （$i \geqslant 64$） （76）

将（76）代入（64）式，可得

$$|N_B| > |N|(\frac{1.183}{p_{44}p_{45}})\prod_{i=46}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i}) \tag{77}$$

将 （2）式代入（77）式，得

$$|N_B| > (p_r^{\ 2} - p_r)(\frac{1.183}{p_{44}p_{45}})\prod_{i=46}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i}) \tag{78}$$

由于 $p_r > p_{r-1} + 2$ （79）

得 $$|N_B| > (p_r p_{r-1} + p_r)(\frac{1.183}{p_r p_{r-1}}) > 1.183 \tag{80}$$

11.1.2 通过子集 N_B 求解

从子集 N_B 中任取一元素 x_0，再引入参量：

$x_k = x_0 - 12k \qquad (k = 0,1,2)$ （81）

$y_k = x_0 - 12k - 2 \qquad (k = 0,1,2)$ （82）

由其定义可知

$x_k \in E$， $x_k > 1 \qquad (k = 0,1,2)$ （83）

$y_k \in E$， $y_k > 1 \qquad (k = 0,1,2)$ （84）

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}$， $i = 1,2,\dots,r$ （85）

$k = 0,1,2$

$y_k \equiv y_{ki} \pmod{p_i}$， $i = 1,2,\dots,r$ （86）

$k = 0,1,2$

x_{ki} 和 y_{ki} 为非负的最小剩余。

由于 $x_0 \in N_B$，根据筛选条件（3）～（12）式可知

$$x_{0i} \neq 0 \tag{87}$$

$$x_{0i} \neq 2 \tag{88}$$

$$x_{0i} \not\equiv 12k \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\ldots,r \quad k=1,2 \tag{89}$$

$$x_{0i} \not\equiv 12k+2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\ldots,r \quad k=1,2 \tag{90}$$

依据同余式的性质，由（81），（82）式推得

$$y_{0i} \equiv x_{0i}-2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\ldots,r \tag{91}$$

$$x_{ki} \equiv x_{0i}-12k \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\ldots,r \quad k=1,2 \tag{92}$$

$$y_{ki} \equiv x_{0i}-12k-2 \pmod{p_i}, \quad i=1,2,\ldots,r \quad k=1,2 \tag{93}$$

由（88）式和（91）式，可知

$$y_{0i} \neq 0, \quad i=1,2,\ldots,r \tag{94}$$

由（89）式和（92）式，可知

$$x_{ki} \neq 0 \ (k=1,2), \quad i=1,2,\ldots,r \tag{95}$$

由（90）式和（93）式，可知

$$y_{ki} \neq 0 \ (k=1,2), \quad i=1,2,\ldots,r \tag{96}$$

根据第一章引理 3:

由（83）式和（87）式可知，x_0 为奇素数。

由（84）式和（94）式可知，y_0 为奇素数。

由（83）式和（95）式可知，x_k $(k=1,2)$ 为奇素数。

由（84）式和（96）式可知，y_k $(k=1,2)$ 为奇素数。

当 $k=0$ 时，由（82）式可得

$$x_0 - y_0 = 2 \tag{97}$$

当$k=1$时，由（81）式和（82）式可得

$$x_1 - y_1 = 2 \tag{98}$$

当$k=2$时，由（81）式和（82）式可得

$$x_2 - y_2 = 2 \tag{99}$$

可见，$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$为三对孪生素数。

同时从（81）式可得

$$x_0 - x_1 = 12\text{，}x_1 - x_2 = 12 \tag{100}$$

由（97），（98），（99），（100）式可知：$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$为等距三孪生素数。

再引入参量：

$$z_k = x_0 - k \qquad (k = 3,4,\ldots,11,15,16,\ldots,23) \tag{101}$$

以集合P中各元素为模数，求得同余式组：

$$z_k \equiv z_{ki} \pmod{p_i}\text{，} \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{102}$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}\text{，} \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{103}$$

依据同余式的性质，由（101）式推得

$$z_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i} \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{104}$$

$$k = 3,4,\ldots,11,15,16,\ldots,23$$

当$i=1$时，$p_1 = 2$，由（104）式知

$$z_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \tag{105}$$

$$k_1 = 1\text{，}k = 3,5,7,9,11,15,17,19,21,23 \tag{106}$$

由筛选条件（3）式，可知

$$x_{01} = 1 \tag{107}$$

由（105），（106）和（107）式，可知

$$z_{k1} = 0\text{，}k = 3,5,7,9,11,15,17,19,21,23 \tag{108}$$

（108）式表示，z_k $(k=3,5,7,9,11,15,17,19,21,23)$ 为复合数。

当 $i=2$ 时，$p_2=3$，由（104）式得

$$z_{k2} \equiv x_{02} - k_2 \pmod{p_2} \qquad (109)$$

$$k_2=1，k=4,10,16,22 \qquad (110)$$

由筛选条件（4）式，可知

$$x_{02}=1 \qquad (111)$$

从（109），（110）和（111）式，得

$$z_{k2}=0，k=4,10,16,22 \qquad (112)$$

（112）式表示，z_k $(k=4,10,16,22)$ 为复合数。

当 $i=3$ 时，$p_3=5$，由（104）式得

$$z_{k3} \equiv x_{03} - k_3 \pmod{p_3} \qquad (113)$$

$$k_3=3，k=8,18 \qquad (114)$$

由筛选条件（5）式，可知

$$x_{03}=3 \qquad (115)$$

从（113），（114）和（115）式，得

$$z_{k3}=0，k=8,18 \qquad (116)$$

（116）式表示，z_k $(k=8,18)$ 为复合数。

当 $i=4$ 时，$p_4=7$，由（104）式得

$$z_{k4} \equiv x_{04} - k_4 \pmod{p_4} \qquad (117)$$

$$k_4=6，k=6,20 \qquad (118)$$

由筛选条件（6）式可知

$$x_{04}=6 \qquad (119)$$

从（117），（118）和（119）式，得

$$z_{k4}=0，k=6,20 \qquad (120)$$

（120）式表示，z_k $(k=6,20)$ 为复合数。

综上（108），（112），（116）和（120）式可知：z_k $(k=3,4,\dots 11,15,16,\dots 23)$ 全是复合数。

由（101）式可知，这 18 个复合数正是介于孪生素数 (x_0,y_0)，和 (x_1,y_1) 之间以及孪生素数 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 之间的 18 个整数，所以，孪生素数 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，(x_2,y_2) 为相邻的等距三孪生素数。

由（87），（94），（95）和（96）式可知，这三对孪生素数都大于 p_r。根据定义，p_r 为不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数，故大于 p_r 的素数必定大于 $A^{1/2}$，由此知这三对孪生素数同时还大于 $A^{1/2}$。至此，由（80）式可得如下结论：在区间 $(A^{1/2},A)$ $(A>250000)$ 内至少有一组"相邻等距三孪生素数"。

11.2 相邻等距三孪生素数的无限性

根据前一节得出的结论可知，在区间 $(A^{1/2},A)$ $(A>250000)$ 内至少有一组"相邻等距三孪生素数"，同理在区间 (A,A^2) 内同样至少有一组"相邻等距三孪生素数"，在区间 (A^2,A^4) 内亦至少有一组"相邻等距三孪生素数"……，依次类推，当 A 的指数趋向无穷时，"相邻等距三孪生素数"必定有无穷多组。

11.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
```

```
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset
=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等距三孪生素数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno（）{
   var a=form1.a.value;
   if（a==""||a==null）{
        alert（"请输入一个数字（100000 以上）！"）；
        return;
   }else if（parseInt（a）<100000）{
        alert（"输入的数字必须大于 100000！"）；
        return;
   }form1.submit（）；
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
相邻等距三孪生素数求解程序</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
   <table width="500" border="0" align="center" cellpadding
="5" cellspacing="0">
```

```
        <tr>
          <td width="202" align="right">请输入一个数字（100000 以上）：</td>
          <td width="278"><input name="a" type="text" id="a"></td>
        </tr>
       <tr>
          <td align="center" colspan="2"><input type="button" name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
               
            <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
        </tr>
      </table>
    </form>
    <p align="center"> </p>
    </body>
    </html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>相邻等距三孪生素数</title>
</head>
```

```
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size="4"><strong>如果出现提示"......是否取消该脚本？"，请点击"否"，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font color="#FF0000" size="5"><strong>相邻等距三孪生素数求解运算结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array（）；
var array_pi = new Array（）；
//var array_pi2 = new Array（）；
var array_a = new Array（）；
//var array_ai = new Array（）；
//var array_hi = new Array（）；
//var array_pi_ni = new Array（）
//a=clng（request.form（"a"））
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt（"<%=a%>"）；
if （a<100000）
{
   document.write（"输入错误！"）；
}else{
document.write（"<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a 为：</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>"）；
//n=parseInt（a/2）；
//alert（n）；
```

```
pr=Math.sqrt（a）;
pr=parseInt（pr）;
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert（pr）;
for（pi=2;pi<=pr;pi++）
{//alert（array_pi[i]）;
    flag=1;
    for（j=2;j<=（pi/2）;j++）
    {
        if（pi%j==0）
        {
            flag=0;
            break;
        }
    }
    if（flag==1）
    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
        //array_pi2[i]=pi;
        //array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //if（i<6）
        //alert（array_pi[i]）;
        //document.write（array_pi[i]+" "）;
```

```
            i++;
        }
    }
    //document.write ("<br>") ;
    //alert (array_pi[i-1]) ;
    ther=i;
    //alert (a-array_pi[ther-1]) ;

    for (i= (array_pi[ther-1]+1) ,j=0;i<=a;i++,j++) {
        array_a[j]=i;
        //if (i<450)
        //alert (array_a[i]) ;
        //document.write (array_a[i]+" ") ;
        //alert (array_n[i]) ;
    }//alert (array_a.length) ;
    //document.write ("<br>") ;
    theflag=0;
    for (i=0;i<array_a.length;i++)
    {
      theflag=0;
      if((array_a[i]%array_pi[0]==1)&&(array_a[i]%array _pi[1]==1)
&& (array_a[i]%array_pi[2]==3) && (array_a[i]%array_pi[3]==6)) {
        //alert ( array_pi[0]+"  "+array_pi[1]+"  "+array_pi[2]+"
"+array_pi[3]) ;
        //alert (array_a[i]) ;
        theflag=1;
      }
      if (theflag==1) {
          for (k=4;k<array_pi.length;k++) {
```

```
            if ((array_a[i]%array_pi[k]==0) ||z (array_a[i]%array_pi[k]==2) ||
((array_a[i]%array_pi[k]) == (12%array_pi[k])) || ((array_a[i]%array_pi[k]) ==
(14%array_pi[k])) || ((array_a[i]%array_pi[k]) == (24%array_pi[k])) ||
((array_a[i]%array_pi[k]) == (26%array_pi[k]))) {
                        array_a[i]=0;
                        break;
                    }
                }
            }else{
                array_a[i]=0;
            }
        }
        x=0;
        for (i=0;i<array_a.length;i++) {
            if (array_a[i]>0) {
                //document.write (array_a[i]+" ") ;
                x++;
            }
            //alert (array_n[i]) ;
        }

    document.write ("<br><font color=#0000FF size=3>从集合N
中求得的相邻等距三孪生素数的组数为：</font>" + x + "<br>");
    if (x>0) {
    document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合N中求
得的相邻等距三孪生素数为：</font><br>") ;
            var astr=new String (a) ;
            var thelength=astr.length;
            var x11,x22,x33,x44,x55,x66;
            m=1;
```

```
for (i=0;i<array_a.length;i++)
{
    switch (array_a[i])
    {
        case 0: break;
        default:
                x1=array_a[i];
                x2=array_a[i]-2;
                x3=array_a[i]-12;
                x4=array_a[i]-14;
                x5=array_a[i]-24;
                x6=array_a[i]-26;

                x11=new String (x1) ;
                for (var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) {
                        x11="0"+""+x11;
                }
                x22=new String (x2) ;
                for (var iii=x22.length;iii<thelength;iii++) {
                        x22="0"+""+x22;
                }
                x33=new String (x3) ;
                for (var iii=x33.length;iii<thelength;iii++) {
                        x33="0"+""+x33;
                }
                x44=new String (x4) ;
                for (var iii=x44.length;iii<thelength;iii++) {
                        x44="0"+""+x44;
                }
                x55=new String (x5) ;
```

```
                    for（var iii=x55.length;iii<thelength;iii++）{
                        x55="0"+""+x55;
                    }
                    x66=new String（x6）;
                    for（var iii=x66.length;iii<thelength;iii++）{
                        x66="0"+""+x66;
                    }
                    document.write（"<font
size='4'>x</font>1="+x66+"  <font
size='4'>x</font>2="+x55+"  <font
size='4'>x</font>3="+x44+"  <font
size='4'>x</font>4="+x33+"  <font
size='4'>x</font>5="+x22+"  <font
size='4'>x</font>6="+x11+";     "）;
                    if（m%2==0）
                    {
                      document.write（"<br>"）;

                    }
                     m=m+1;
            }

        }
    }

    document.all（"wait_div"）.style.display="none";
    document.all（"wait2_div"）.style.display="";
    }
    </script>
```

```
</p></body>
</html>
```

11.4 实筛数据

输入的数 a 为：100000
从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数的组数为：1
从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数为：
$x1$=091127 $x2$=091129 $x3$=091139
$x4$=091141 $x5$=091151 $x6$=091153

输入的数 a 为：500000
从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数的组数为：3
从集合 N 中求得的相邻等距三孪生素数为：
$x1$=091127 $x2$=091129 $x3$=091139
$x4$=091141 $x5$=091151 $x6$=091153

$x1$=236867 $x2$=236869 $x3$=236879
$x4$=236881 $x5$=236891 $x6$=236893

$x1$=422087 $x2$=422089 $x3$=422099
$x4$=422101 $x5$=422111 $x6$=422113

第十二章 素数等差级数

多年来人们发现的单由素数组成的等差级数的项数越来越大，下面表中列出的只是其中项数较大的一部分。

等差级数的一般表示形式为

$$c, c+d, \ldots, c+(n-1)d$$

式中 c 为首项，d 为公差， n 为项数。

假若其中每一项都为素数，则称该等差级数为“素数等差级数”，或者更具体一点称为“n 项素数等差级数”。根据实际发现的素数等差级数的项数越来越大这一点，猜想应该有任意大项数的素数等差级数，但还未得到证明。至今，这个问题仍为数论中一个公认没有解决的问题，值得探讨。

素数组成的长等差级数表

项数 n	公　差 d	首　项 c	末项 $c+(n-1)d$
12	30030	23143	353473
13	510510	766439	6892559
14	2462460	46883579	78895559
16	9699690	53297929	198793279
16	223092870	2236133941	5582526991
17	87297210	3430751869	4827507229
18	717777060	4808316343	17010526363
19	4180566390	8297644387	83547839407
19	13608665070	244290205469	489246176729
20	2007835830	803467381001	841616261771
20	7643355720	1140997291211	1286221049891

续表

项数 n	公　差 d	首 项 c	末项 $c+(n-1)d$
20	18846497670	214861583621	572945039351
20	1140004565700	1845449006227	23505535754527
20	19855265430	24845147147111	25222397190281
21	1419763024680	142072321123	28537332814723

表中给出的是由 James Fry，V.A.Golubev，Andrew Moran，Paul Pritchard，S.C.Root，W.N.Seredinskii，S.Weintraub 和 Jeff Young 所发现的由 n 项素数组成的等差级数。

12.1　求解证明

设 A 为某一选定的正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\ldots<p_r\leqslant A^{1/2}$$

给出项数 n，再设定相关参量：

$$n\leqslant p_t-1 \tag{1}$$

$$d=\prod_{i=1}^{t}p_i \tag{2}$$

选定 A 值，使 p_r 满足下述不等式：

$$p_r>dp_t \tag{3}$$

将不超过 A 且大于 $2p_r$ 的全部正整数集合用 N 表示，即

$$N=(2p_r+1,2p_r+2,\ldots,A)$$

则 N 的基数 $|N|$ 为

$$|N| = A - 2p_r \geqslant p_r^{\ 2} - 2p_r \tag{4}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g \not\equiv kd \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{5}$$

$$k = 0,1,\ldots,n-1$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中，将符合（5）式筛选条件的所有元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

12.1.1 求证筛函数的下界

已知，集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数。根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N| \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{6}$$

根据第一章的（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N| \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{p_i}{|N|}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{7}$$

其中，α_i 为根据筛选条件所选取的集合 N 中模 p_i 的同余类子集的个数。下面具体确定 α_i 的数值。

当 $i \leqslant t$ 时，$p_i \leqslant p_t$

由（2）式知，所有不超过 p_t 的素数都是公差 d 的素因子。所以，这时有

$$d \equiv 0 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,t \tag{8}$$

筛选条件（5）式将合并为一个条件：

$$g \neq 0 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,t \tag{9}$$

依据（9）式可知，集合 N 中只有模 p_i 的“0 同余类子集”不符合筛选条件，其余 (p_i-1) 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件，故得

$$\alpha_i = p_i - 1, \quad i=1,2,\ldots,t \tag{10}$$

当，$i>t$ 时，$p_i > p_t$

由（2）式知，所有大于 p_t 的素数都不是公差 d 的素因子。故数组：$0,d,\ldots,(n-1)d$ 中每两两之间的差值皆不能被 $p_i(>n)$ 整除，即该数组中所有元素每两两之间对模 p_i 皆不同余。由此知，筛选条件（5）式根据不同的 k 值实际包含了 n 个不同的条件，这 n 个不同的条件对应于模 p_i 的 n 个不同的同余类子集。此时集合 N 中将有 n 个模 p_i 的同余类子集都不符合筛选条件，其余 p_i-n 个模 p_i 的同余类子集则能符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = p_i - n, \qquad i>t \tag{11}$$

将（10），（11）代入（6）式可得

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{t}\left(\frac{p_i-1}{p_i}\right)\prod_{j=t+1}^{r}\left(\frac{p_j-n}{p_j}\right) \tag{12}$$

将（10），（11）代入（7）式可得

$$|N_B| > F_1|N|\prod_{i=1}^{t}\left(\frac{p_i-1}{p_i}\right)\prod_{j=t+1}^{r}\left(\frac{p_j-n}{p_j}\right) \tag{13}$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{p_i}{|N|}\right) > 1-\left(\frac{1}{|N|}\right)\sum_{i=1}^{r}p_i \tag{14}$$

由第一章（77）式推得

$$\Pi(x) - \Pi\left(\frac{x}{2}\right) < \Pi\left(\frac{x}{2}\right)$$

可见，数值越大的区域素数分布的密度越小，故得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < (\frac{1}{2})(p_1 + p_r)\Pi(p_r) \qquad (15)$$

依据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < (6\ln 2)(\frac{p_r}{\ln p_r}) \qquad (16)$$

（16）代入（15）式，得，

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \qquad (17)$$

（17）式代入（14）式得

$$F_1 > 1 - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{|N|\ln p_r} \qquad (18)$$

将（18）代入（13）式得

$$|N_B| > F_2 \prod_{j=t+1}^{r} (\frac{p_j - n}{p_j}) \qquad (19)$$

$$F_2 = \{|N| - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r}\} \prod_{i=1}^{t} (\frac{p_i - 1}{p_i}) \qquad (20)$$

对$|N|$作以下变换。

$$|N| = |N|(\frac{p_2}{p_3 - 1}) + \frac{|N|}{p_3 - 1} \qquad (21)$$

$$|N| = |N|(\frac{p_3}{p_4 - 1}) + \frac{|N|}{p_4 - 1} \qquad (22)$$

$$|N| = |N|(\frac{p_4}{p_5 - 1}) + \frac{3|N|}{p_5 - 1} \qquad (23)$$

$$|N| = |N|(\frac{p_5}{p_6 - 1}) + \frac{|N|}{p_6 - 1} \qquad (24)$$

$$|N| = |N|(\frac{p_6}{p_7 - 1}) + \frac{3|N|}{p_7 - 1} \tag{25}$$

$$|N| = |N|(\frac{p_7}{p_8 - 1}) + \frac{|N|}{p_8 - 1} \tag{26}$$

$$|N| = |N|(\frac{p_8}{p_9 - 1}) + \frac{3|N|}{p_9 - 1} \tag{27}$$

$$|N| = |N|(\frac{p_9}{p_{10} - 1}) + \frac{5|N|}{p_{10} - 1} \tag{28}$$

将（21），（22），...，（28）式逐次代入右端第一项可得

$$|N| = |N|\prod_{i=3}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1}) + F_3 \tag{29}$$

$$\begin{aligned} F_3 = &(\frac{|N|}{p_3 - 1})\prod_{i=4}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1}) + (\frac{|N|}{p_4 - 1})\prod_{i=5}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1}) + \\ &(\frac{3|N|}{p_5 - 1})\prod_{i=6}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1}) + (\frac{|N|}{p_6 - 1})\prod_{i=7}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1}) + \\ &(\frac{3|N|}{p_7 - 1})\prod_{i=8}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1}) + (\frac{|N|}{p_8 - 1})\prod_{i=9}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1}) + \\ &(\frac{3|N|}{p_9 - 1})(\frac{p_9}{p_{10} - 1}) + (\frac{5|N|}{p_{10} - 1}) \end{aligned} \tag{30}$$

将　$p_3 = 5$，$p_4 = 7$，$p_5 = 11$，$p_6 = 13$，$p_7 = 17$，$p_8 = 19$，$p_9 = 23$，$p_{10} = 29$ 代入（30）式可得

$$F_3 = 0.781|N| \tag{31}$$

将（31）式代入（29）式，再将（29）式代入（20）式，可得

$$F_2 = \{|N|\prod_{i=3}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i - 1}) + F_4\}\prod_{i=1}^{t}(\frac{p_i - 1}{p_i}) \tag{32}$$

$$F_4 = 0.781|N| - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (33)$$

由（4）式可知

$$|N| \geqslant p_r^{\ 2} - 2p_r \quad (34)$$

（34）式代入（33）式可得

$$F_4 \geq 0.781(p_r - 2)p_r - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)p_r}{\ln p_r} \quad (35)$$

令 $$F_5 = 0.781(p_r - 2) - \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)}{\ln p_r} \quad (36)$$

则 $$F_4 > F_5 p_r \quad (37)$$

$$\frac{\mathrm{d}F_5}{\mathrm{d}p_r} = 0.781 - (3\ln 2)\{\frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\} =$$

$$0.781 - \frac{3\ln 2}{\ln p_r} + \frac{(3\ln 2)(p_1 + p_r)}{p_r \ln^2 p_r} >$$

$$0.781 - \frac{3\ln 2}{\ln p_r} \quad (38)$$

令 $0.781 - \dfrac{3\ln 2}{\ln p_r} > 0$

可得 $$p_r > 14.33 \quad (39)$$

将条件（39）式代入（38）式可得

$$\frac{\mathrm{d}F_5}{\mathrm{d}p_r} > 0 \qquad (p_r > 14.33) \quad (40)$$

（40）式表示，当 $p_r > 14.33$ 时，F_5 为 p_r 的递增函数。

当 A≥$\prod_{i=1}^{11} p_i^{\ 2}$ 时，$p_r > 10^{10} >> 14.33$

且 $F_5(p_r = 10^{10}) > 10^9$， 故知

$$F_5 > 10^9 \qquad (A \geqslant \prod_{i=1}^{11} p_i^2) \tag{41}$$

将（41）式代入（37）式，再将（37）式代入（32）式可得

$$F_2 > |N|(\frac{1}{3})\prod_{i=3}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i})\prod_{j=11}^{t}(\frac{p_j - 1}{p_j}) +$$

$$10^9 p_r \prod_{i=1}^{t}(\frac{p_i - 1}{p_i}) \tag{42}$$

由于　$p_i - 1 \geqslant p_{i-1}$，　　$i \geqslant 2$　　（43）

故得

$$F_2 > (\frac{|N|}{3})\prod_{i=3}^{t}(\frac{p_{i-1}}{p_i}) + (10^9 p_r)(\frac{1}{2})\prod_{i=2}^{t}(\frac{p_{i-1}}{p_i}) =$$

$$\frac{N}{p_t} + (10^9)(\frac{p_r}{p_t}) \tag{44}$$

将（44）代入（19）式可得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{p_t} + (10^9)(\frac{p_r}{p_t})\}\prod_{i=t+1}^{r}\{\frac{p_i - n}{p_i}\} \tag{45}$$

由（4）式可知

$$|N| \geq p_r^2 - 2p_r \tag{46}$$

（46）式代入（45）式，得

$$|N_B| > \{p_r^2 + (10^9 - 2)p_r\}(\frac{1}{p_t})\prod_{i=t+1}^{r}(\frac{p_i - n}{p_i}) \tag{47}$$

由于 $p_{r+1} > p_r > dp_t$，根据（3）式条件要求，完全可以选用 p_{r+1} 取代 p_r（项数 n 和其它参量都不变）。同上推导过程可得

$$|N_{B1}| > \{p_{r+1}^2 + (10^9 - 2)p_{r+1}\}(\frac{1}{p_t})\prod_{i=t+1}^{r+1}(\frac{p_i - n}{p_i}) \tag{48}$$

设在 p_r 处，相邻素数的平均间距为 d ，则得

$$p_{r+1}=d+p_r \tag{49}$$

即 $d=p_{r+1}-p_r$ （50）

令 $\lambda=10^9-2$ （51）

$$H=\prod_{i=t+1}^{r}\left(\frac{p_i-n}{p_i}\right) \tag{52}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{p_t} \tag{53}$$

将（49），（51），（52），（53）式代入（48）式得

$$\begin{aligned}
&|N_{B1}|>\{(d+p_r)^2+\lambda(d+p_r)\}\varepsilon H\left(1-\frac{n}{p_{r+1}}\right)=\\
&({p_r}^2+\lambda p_r)\varepsilon H-({p_r}^2+\lambda p_r)\varepsilon H\left(\frac{n}{p_{r+1}}\right)+\\
&(d^2+2dp_r+\lambda d)\varepsilon H\left(1-\frac{n}{p_{r+1}}\right)=\\
&({p_r}^2+\lambda p_r)\varepsilon H-({p_r}^2+\lambda p_r)\left(\frac{\varepsilon Hn}{p_{r+1}}\right)+\\
&(d^2+2dp_r+\lambda d)(p_r+d)\left(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}\right)-\\
&(d^2+2dp_r+\lambda d)\left(\frac{\varepsilon Hn}{p_{r+1}}\right)=\\
&({p_r}^2+\lambda p_r)\varepsilon H+\left(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}\right)M
\end{aligned} \tag{54}$$

式中

$$\begin{aligned}
M=&2d{p_r}^2+(d^2+\lambda d)p_r+2d^2p_r+(d^2+\lambda d)d-\\
&n{p_r}^2-\lambda np_r-2ndp_r-d^2n-\lambda nd=
\end{aligned}$$

$$2dp_r^{\ 2}+(3d^2+\lambda d)p_r+(d^2+\lambda d)d-$$

$$np_r^{\ 2}-(2d+\lambda)np_r-(d^2+\lambda d)n=$$

$$dp_r^{\ 2}+d^2p_r+(d-n)p_r^{\ 2}+$$

$$(d-n)(2d+\lambda)p_r+(d-n)(d^2+\lambda d) \tag{55}$$

由第一章（77）式可知

$$\Pi(p_r)=\eta(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{56}$$

$$\Pi(p_{r+1})=\eta(\frac{p_{r+1}}{\ln p_{r+1}}) \tag{57}$$

$$\Pi(p_{r+1})-\Pi(p_r)=\eta(\frac{p_{r+1}}{\ln p_{r+1}})-\eta(\frac{p_r}{\ln p_r})$$

$$1=\frac{\eta p_{r+1}\ln p_r-\eta p_r\ln p_{r+1}}{\ln p_{r+1}\ln p_r}$$

$$\eta p_{r+1}\ln p_r-\eta p_r\ln p_{r+1}=\ln p_{r+1}\ln p_r \tag{58}$$

由于　$\ln p_{r+1}>\ln p_r$

故知

$$\eta p_{r+1}\ln p_{r+1}-\eta p_r\ln p_{r+1}>\eta p_{r+1}\ln p_r-\eta p_r\ln p_{r+1} \tag{59}$$

将（58）式代入（59）式，得

$$\eta(p_{r+1}-p_r)>\ln p_r \tag{60}$$

令　$\dfrac{\ln p_r}{\eta}>n$

得　$p_r>\mathrm{e}^{n\eta}$　（61）

将条件（61）式代入（60）式，可得

$$p_{r+1}-p_r>n \qquad (p_r>\mathrm{e}^{n\eta}) \tag{62}$$

将（50）式代入（62）式，得

$$d > n \qquad (p_r > e^{n\eta}) \tag{63}$$

将（63）式代入（55）式，可得

$$M > dp_r^{\ 2} + d^2 p_r \tag{64}$$

将（64）式代入（54）式，可得

$$|N_{B1}| > \{p_r^{\ 2} + (\lambda + d)p_r\}\varepsilon H \tag{65}$$

将（51），（52），（53）式代入（47）式，可得

$$|N_B| > (p_r^{\ 2} + \lambda p_r)\varepsilon H \tag{66}$$

比较（65）式和（66）式可知，$|N_B|$的下界值随着p_r的增大而增大，而且相关增量d根据（50）和（60）式可知，亦为p_r的递增函数。p_r又是一个没有固定上界限制的量，能够随意选取。故总可以选择一个合适的p_r值，使得满足下述不等式：

$$|N_B| > 1 \tag{67}$$

12.1.2 通过子集 N_B 求解

从子集N_B中任取一元素x_0再引入参量：

$$x_k = x_0 - kd\,, \qquad k = 1,2,\ldots,n-1 \tag{68}$$

由其定义可知：

$$x_k \in E\,, \quad x_k > 1\,, \qquad k = 1,2,\ldots,n-1 \tag{69}$$

以集合P中各元素为模数，求得同余式组：

$$x_0 \equiv x_{0i} \pmod{p_i}\,, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{70}$$

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}\,, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{71}$$

$$k = 1,2,\ldots,n-1$$

根据x_0的定义可知

$$x_0 \in E\,, \qquad x_0 > 1 \tag{72}$$

由于$x_0 \in N_B$，由筛选条件（5）式可知

$$x_{0i} \neq 0\,, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{73}$$

$$x_{0i} \not\equiv kd \pmod{p_i}\,, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{74}$$

$$k = 1,2,\ldots,n-1$$

依据同余式的性质，由（68）式可推得

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - kd \pmod{p_i}\,, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{75}$$

$$k = 1,2,\ldots,n-1$$

由（74）和（75）式可知

$$x_{ki} \neq 0\,, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{76}$$

$$k = 1,2,\ldots,n-1$$

根据第一章引理 3，由（72）和（73）式可知：x_0 为奇素数

根据第一章引理 3，由（69）和（76）式可知：x_k 为奇素数 $(k = 1,2,\ldots,n-1)$。

即，数组 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ 中所有元素都是奇素数。

根据（68）式可知，该数组还是等差级数，其项数为 n。所以，该数组构成“n 项素数等差级数”。（其中项数 n 为未定量，可以随意选取）。

已知 x_0 为集合 N_B 中任一元素，故 N_B 中每个元素都对应一组“n 项素数等差级数”。而且项数 n 可以任意给定，没有上界限制。

12.2　求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示共三个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<%dim n1,n
n1=request.form("a")
n=0
```

```
if n1<>"" then
    n=clng(n1)
end if
%>

<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数等差级数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
    var a=form1.a.value;
    if(a==""||a==null){
    alert("请输入一个项数 n(大于 2)！ ");
    form1.a.focus();
    return;
    }form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
素数等差级数</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的整数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！ </p>
```

```
<form name="form1" method="post" action="input.asp">
  <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
      <tr>
        <td width="232" align="right">请输入一个项数n(大于
2)：</td>
        <td width="248"><input name="a" type="text" id="a"> </td>
      </tr>
    <tr>
        <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
             
          <input type="reset" name="Submit2" value="重置
"></td>
      </tr>
   </table>
</form>
<form name="form2" method="post" action="input2.asp">
 <input name="thea" type="hidden" id="thea" value="">
 <input name="n" type="hidden" id="n" value="">
 <input name="pt" type="hidden" id="pt" value="">
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
<script language="JavaScript">
var n=parseInt("<%=n%>");
if(n!=0){
 var i,j,flag,pt
 for(i=n+1;true;i++){
```

```
        flag=1;
        for(j=2;j<=(i/2);j++)
        {
            if(i%j==0)
            {
                flag=0;
                break;
            }
        }
        if(flag==1){
            pt=i;
            break;
        }
    }
    var array_pi = new Array();
    i=0;
    var pi
    for(pi=2;pi<=pt;pi++)
    {//alert(array_pi[i]);
        flag=1;
        for(j=2;j<=(pi/2);j++)
        {
            if(pi%j==0)
            {
                flag=0;
                break;
            }
        }
        if(flag==1)
        {
            array_pi[i]=pi;
```

```
            i++;
        }
    }
    var d=1;
    for(i=0;i<array_pi.length;i++){
        d=d*array_pi[i];
    }
    var thea=d*d*pt*pt;
    //alert("pt="+pt+"n="+n);
    form2.thea.value=thea;
    form2.n.value=n;
    form2.pt.value=pt;
    form2.submit();
}
</script>
```

第二个文件（input2.asp）：

```
<%
dim thea,n,pt
thea=request("thea")
n=request("n")
pt=request("pt")
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数等差级数</title>
```

```
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
 var thea=parseInt("<%=thea%>");
 var a=form1.a.value;
 if(a==""||a==null){
      alert("请输入任一正整数（大于"+thea+"）！ ");
      form1.a.focus();
      return;
 }/*else if(parseInt(a)<thea){
      alert("输入的偶数必须是大于"+thea+"的正整数！ ");
      return;
 }*/form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
素数等差级数</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的整数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！ <br>
   <br>
   <a href="input.asp">重输入项数</a></p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
   <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
      <tr>
```

```
        <td width="232" align="right">请输入任一正整数（大于<%=thea%>）：</td>
        <td width="248"><input name="a" type="text" id="a">
    <input name="n" type="hidden" id="n" value="<%=n%>">
    <input name="pt" type="hidden" id="pt" value="<%=pt%>
"></td>
      </tr>
    <tr>
        <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
             
          <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
      </tr>
    </table>
  </form>
  <p align="center"> </p>
  </body>
  </html>
```

第三个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
n=request.form("n")
pt=request.form("pt")
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html;
charset=gb2312">
```

```
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>素数等差级数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点
击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>素数组成的等差级数求解运
算结果</strong></font><br><br>
  <a href="input.asp">重输入项数</a><br>
  <br>
  <a href="javascript:history.go(-1);">重输入 a</a></div>
<p><script language="JavaScript">

var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3,d,t,d1,maxk,
theitems,pt;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
var array_k = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
theitems=parseInt("<%=n%>");
```

```
    //alert("<%=pt%>");
    pt=parseInt("<%=pt%>");
    maxk=theitems-1;
    //alert("theitems="+theitems+"pt="+pt+"maxk="+maxk+"a="+a
);
    if (a<=0)
    {
        document.write("输入错误！");
    }else{
    document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的整数 a
为 ： </font><font color=#8000FF
size=4>"+a+"    <font color=#FF0000
size='4'> 输 入 的 项 数 n 为 ： </font><font color=#8000FF
size=4>"+theitems+"<br>");
    //alert(n);
    pr=Math.sqrt(a);
    pr=parseInt(pr);
    //i=0
    var i1=1;
    //var i2=1;
    ther=0;
    i=0
    //alert(pr);
    for(pi=2;pi<=pr;pi++)
    {//alert(array_pi[i]);
     flag=1;
     for(j=2;j<=(pi/2);j++)
     {
         if(pi%j==0)
         {
             flag=0;
```

```
            break;
        }
    }
    if(flag==1)
    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
        //array_pi2[i]=pi;
        //array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //alert(array_pi[i]);
        i++;
    }
}

ther=i;


d1=1;
d=1;
/*for(i=parseInt(ther/3);i>=2;i--){
 d1=1;
 for(j=i;j>=0;j--){
        d1=d1*array_pi[j];
 }*/
for(i=0;array_pi[i]<=pt;i++){
 d=d*array_pi[i];
 /*if(d1>pr){
        t=i-2;
        d=(d1/array_pi[i]);
```

```
            pt=array_pi[i-1];
            maxk=array_pi[i-1]-3;
            theitems=maxk+1;
            break;
     }*/
    }
    //alert("d="+d+"theitems="+theitems);
    j=0;
    for(i=(((1+pt)*pr)+1);i<=a;i++){
     array_n[j]=i;
     //alert(array_n[i]);
     j++;
    }

    for(i=0;i<=maxk;i++){
     array_k[i]=i;

    }

    for(i=0;i<array_n.length;i++){
     for(j=0;j<array_k.length;j++){
            flag=1;
            for(thep=0;thep<array_pi.length;thep++){

     if(array_n[i]%array_pi[thep]==(d*array_k[j])%(array_pi[thep])
){
                    array_n[i]=0;
                    flag=0;
                    break;
                }
            }
```

```
            if(flag==0){ break;}
      }
     }

     xx=0;
     for(i=0;i<array_n.length;i++){
      if(array_n[i]>0){
            xx++;
      }
     }//alert("xx="+xx);
     if(xx>0){
      document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的素数等差级数的组数为：</font>" + xx + "<br>");
      document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N 中求
得的素数等差级数为：</font><br>");
      var thearrays=1;
      for(i=0;i<array_n.length;i++)
      {
          if(array_n[i]>0)
          {
              //document.write("<font   size='4'> 第 "+(thearrays)+"
组：</font><br>");
              thearrays++;
              m=1;
              for(j=0;j<theitems;j++){

document.write((array_n[i]-(d*array_k[j]))+"  ");
                    if(m%10==0)
                    {
                       document.write("<br>");
```

```
                }
                m++;
            }document.write("<br>");
        }

    }
    }

    document.all("wait_div").style.display="none";
    document.all("wait2_div").style.display="";
    }
    </script>
    </p></body>
    </html>
```

12.3　实筛数据

输入的整数 a 为：10000　　输入的项数 n 为：5

从集合 N 中求得的素数等差级数的组数为：65

从集合 N 中求得的素数等差级数为：

967 757 547 337 127
997 787 577 367 157
1019 809 599 389 179
1039 829 619 409 199
1063 853 643 433 223
1097 887 677 467 257
1193 983 773 563 353
1229 1019 809 599 389
1249 1039 829 619 409
1303 1093 883 673 463
1307 1097 887 677 467
1439 1229 1019 809 599

1459 1249 1039 829 619
1583 1373 1163 953 743
1669 1459 1249 1039 829
1699 1489 1279 1069 859
1721 1511 1301 1091 881
1879 1669 1459 1249 1039
1931 1721 1511 1301 1091
2089 1879 1669 1459 1249
2141 1931 1721 1511 1301
2161 1951 1741 1531 1321
2293 2083 1873 1663 1453
2351 2141 1931 1721 1511
2371 2161 1951 1741 1531
2503 2293 2083 1873 1663
2713 2503 2293 2083 1873
2843 2633 2423 2213 2003
3221 3011 2801 2591 2381
3539 3329 3119 2909 2699
3767 3557 3347 3137 2927
3793 3583 3373 3163 2953
3881 3671 3461 3251 3041
4003 3793 3583 3373 3163
4091 3881 3671 3461 3251
4339 4129 3919 3709 3499
4549 4339 4129 3919 3709
4703 4493 4283 4073 3863
4759 4549 4339 4129 3919
4861 4651 4441 4231 4021
4969 4759 4549 4339 4129
5179 4969 4759 4549 4339
5443 5233 5023 4813 4603

5519 5309 5099 4889 4679
5653 5443 5233 5023 4813
5717 5507 5297 5087 4877
5861 5651 5441 5231 5021
5927 5717 5507 5297 5087
6011 5801 5591 5381 5171
6067 5857 5647 5437 5227
6113 5903 5693 5483 5273
6221 6011 5801 5591 5381
6277 6067 5857 5647 5437
6323 6113 5903 5693 5483
6763 6553 6343 6133 5923
6991 6781 6571 6361 6151
7331 7121 6911 6701 6491
7541 7331 7121 6911 6701
8147 7937 7727 7517 7307
8941 8731 8521 8311 8101
9049 8839 8629 8419 8209
9151 8941 8731 8521 8311
9601 9391 9181 8971 8761
9811 9601 9391 9181 8971
9839 9629 9419 9209 8999

输入的整数 a 为：100000　　输入的项数 n 为：7
从集合 N 中求得的素数等差级数的组数为：76
从集合 N 中求得的素数等差级数为：
4003 1693 -617 -2927 -5237 -7547 -9857
4241 1931 -379 -2689 -4999 -7309 -9619
4999 2689 379 -1931 -4241 -6551 -8861
6277 3967 1657 -653 -2963 -5273 -7583
6361 4051 1741 -569 -2879 -5189 -7499

6551 4241 1931 -379 -2689 -4999 -7309
7309 4999 2689 379 -1931 -4241 -6551
7499 5189 2879 569 -1741 -4051 -6361
7583 5273 2963 653 -1657 -3967 -6277
8861 6551 4241 1931 -379 -2689 -4999
9619 7309 4999 2689 379 -1931 -4241
9857 7547 5237 2927 617 -1693 -4003
10099 7789 5479 3169 859 -1451 -3761
10151 7841 5531 3221 911 -1399 -3709
11171 8861 6551 4241 1931 -379 -2689
12409 10099 7789 5479 3169 859 -1451
12569 10259 7949 5639 3329 1019 -1291
12583 10273 7963 5653 3343 1033 -1277
12973 10663 8353 6043 3733 1423 -887
13297 10987 8677 6367 4057 1747 -563
14407 12097 9787 7477 5167 2857 547
14879 12569 10259 7949 5639 3329 1019
14923 12613 10303 7993 5683 3373 1063
15227 12917 10607 8297 5987 3677 1367
15607 13297 10987 8677 6367 4057 1747
16067 13757 11447 9137 6827 4517 2207
17189 14879 12569 10259 7949 5639 3329
17683 15373 13063 10753 8443 6133 3823
19417 17107 14797 12487 10177 7867 5557
19433 17123 14813 12503 10193 7883 5573
19993 17683 15373 13063 10753 8443 6133
21713 19403 17093 14783 12473 10163 7853
21727 19417 17107 14797 12487 10177 7867
22303 19993 17683 15373 13063 10753 8443
23801 21491 19181 16871 14561 12251 9941
24023 21713 19403 17093 14783 12473 10163

26111	23801	21491	19181	16871	14561	12251
26141	23831	21521	19211	16901	14591	12281
28309	25999	23689	21379	19069	16759	14449
30089	27779	25469	23159	20849	18539	16229
32321	30011	27701	25391	23081	20771	18461
33119	30809	28499	26189	23879	21569	19259
34337	32027	29717	27407	25097	22787	20477
34631	32321	30011	27701	25391	23081	20771
35423	33113	30803	28493	26183	23873	21563
35797	33487	31177	28867	26557	24247	21937
36671	34361	32051	29741	27431	25121	22811
37633	35323	33013	30703	28393	26083	23773
39901	37591	35281	32971	30661	28351	26041
41669	39359	37049	34739	32429	30119	27809
43271	40961	38651	36341	34031	31721	29411
49117	46807	44497	42187	39877	37567	35257
49429	47119	44809	42499	40189	37879	35569
51427	49117	46807	44497	42187	39877	37567
52901	50591	48281	45971	43661	41351	39041
55813	53503	51193	48883	46573	44263	41953
57191	54881	52571	50261	47951	45641	43331
63803	61493	59183	56873	54563	52253	49943
70451	68141	65831	63521	61211	58901	56591
74177	71867	69557	67247	64937	62627	60317
76487	74177	71867	69557	67247	64937	62627
78797	76487	74177	71867	69557	67247	64937
84859	82549	80239	77929	75619	73309	70999
87103	84793	82483	80173	77863	75553	73243
87679	85369	83059	80749	78439	76129	73819
89413	87103	84793	82483	80173	77863	75553
89989	87679	85369	83059	80749	78439	76129

93287 90977 88667 86357 84047 81737 79427
94111 91801 89491 87181 84871 82561 80251
94621 92311 90001 87691 85381 83071 80761
95597 93287 90977 88667 86357 84047 81737
95813 93503 91193 88883 86573 84263 81953
96931 94621 92311 90001 87691 85381 83071
97577 95267 92957 90647 88337 86027 83717
98123 95813 93503 91193 88883 86573 84263
99241 96931 94621 92311 90001 87691 85381

输入的整数 a 为：200000　　输入的项数 n 为：9
从集合 N 中求得的素数等差级数的组数为：4
从集合 N 中求得的素数等差级数为：
17189 14879 12569 10259 7949 5639 3329 1019 -1291
22303 19993 17683 15373 13063 10753 8443 6133 3823
78797 76487 74177 71867 69557 67247 64937 62627 60317
99241 96931 94621 92311 90001 87691 85381 83071 80761

第十三章　孪生素数组成的双等差级数

在第十二章中我们讨论了奇素数组成的等差级数的项数问题，并证明存在任意大项数的奇素数组成的等差级数。与此同类的还有孪生素数组成的双等差级数的项数问题，将在本章中做以讨论。

13.1　求解证明

设 A 为某个选定的正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\ldots<p_r\leqslant A^{1/2}$$

给出项数 f，再设定相关参量：

$$f\leqslant\frac{p_t-1}{2}\tag{1}$$

$$d=\prod_{i=1}^{t}p_i\tag{2}$$

选定 A 值，使 p_r 满足下述不等式：

$$p_r>dp_t\tag{3}$$

将不超过 A 且大于 $2p_r$ 的全部正整数集合用 N 表示，即 $N=(2p_r+1,2p_r+2,\ldots,A)$，其基数$|N|$则为

$$|N|=A-2p_r\geq p_r^{\ 2}-2p_r\tag{4}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g \not\equiv kd \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{5}$$
$$k=0,1,\ldots,f-1$$

$$g \not\equiv kd+2 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{6}$$
$$k=0,1,\ldots,f-1$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（5），（6）式条件的所有元素分选出来组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

13.1.1 求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数，根据第一章的相关公式（61）式可知基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B|>|N|\prod_{i=1}^{r}(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{7}$$

根据第一章中给出的（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B|>|N|\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{|N|})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{8}$$

式中 α_i 为集合 N 中按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数，下面具体确定 α_i 的数值。

当 $i=1$ 时，$p_1=2$，而且 p_1 是 d 的素因子，所以

$$kd \equiv 0 \pmod{p_1}, \qquad k=0,1,\ldots,f-1$$

$$kd+2 \equiv 0 \pmod{p_1}, \qquad k=0,1,\ldots,f-1$$

此时，(5)，(6) 式合并为一个条件：

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_1} \tag{9}$$

由 (9) 式可知，集合 N 中模 p_1 的“0 同余类子集”不符合筛选条件，而模 p_1 的“1 同余类子集”符合筛选条件。故得

$$\alpha_1 = 1 \tag{10}$$

当 $i>1$，且 $i \leqslant t$ 时，由 (2) 式可知，此时 $p_i(i=2,3,\dots,t)$ 皆为 d 的素因子，所以

$$kd \equiv 0 \pmod{p_i}, \qquad i=2,3,\dots,t$$

$$k=0,1,\dots,f-1$$

$$kd+2 \equiv 2 \pmod{p_i}, \qquad i=2,3,\dots,t$$

$$k=0,1,\dots,f-1$$

由此，(5)，(6) 式合并为以下两个条件：

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \qquad i=2,3,\dots,t \tag{11}$$

$$g \not\equiv 2 \pmod{p_i}, \qquad i=2,3,\dots,t \tag{11*}$$

由 (11) 和 (11*) 式可知，集合 N 中除去模 p_i 的“0 同余类子集”和“2 同余类子集”外，其余 (p_i-2) 个模 p_i 的同余类子集都符合筛选条件，故得

$$\alpha_i = p_i - 2, \qquad i=2,3,\dots,t \tag{12}$$

当 $i>t$ 时，$p_i \geqslant p_{t+1}$ 此时，所有的 $p_i(i=t+1,t+2,\dots,r)$ 都不是 d 的素因子，而且都大于 $(f-1)$，所以数组 $kd(k=0,1,\dots,f-1)$ 中各元素每两两之间的差值皆不能被 p_i 整除，故知它们每两两之间对模 p_i 皆不同余。同理可知，数组 $kd+2(k=0,1,\dots,f-1)$ 中各元素每两两之间对模 p_i 皆不同余。

由此知，(5) 式包含了 f 个不同的筛选条件，这 f 个筛选条件对应于模 p_i 的 f 个不同的同余类子集。(6) 式同样也对应于模

p_i 的 f 个不同的同余类子集。（5）式和（6）式分别对应的这两组同余类子集相互之间可能有所重叠（因为，不能保证差值 $kd+2$ $(k=0,1,\ldots,f-1)$ 与 p_i $(i>t)$ 都互素），所以（5）式和（6）式共计对应的互不相同的同余类子集的个数 Q 应介于 f 和 $2f$ 之间。即

$$f<Q\leqslant 2f \tag{13}$$

这样一来，根据（5）式和（6）式筛选条件，集合 N 中有模 p_i 的 Q 个同余类子集不符合筛选条件，其余模 p_i 的 p_i-Q 个同余类子集都符合筛选条件。故得

$$\alpha_i=(p_i-Q)\,,\qquad i>t \tag{14}$$

将（10），（12）和（14）代入（7）式可得

$$|N_B|>|N|(\frac{1}{2})\prod_{i=2}^{t}(\frac{p_i-2}{p_i})\prod_{j=t+1}^{r}(\frac{p_j-Q}{p_j}) \tag{15}$$

将（10），（12）和（14）代入（8）式可得

$$|N_B|>F_1|N|(\frac{1}{2})\prod_{i=2}^{t}(\frac{p_i-2}{p_i})\prod_{j=t+1}^{r}(\frac{p_j-Q}{p_j}) \tag{16}$$

$$F_1=\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{|N|}) \tag{17}$$

由于，$F_1>0$，根据第一章（64）式可将（16）式改写为

$$|N_B|>F_1(\frac{|N|}{2})\prod_{i=2}^{t}(\frac{p_i-2}{p_i})\prod_{j=t+1}^{r}(\frac{p_j-2f}{p_j}) \tag{18}$$

由（17）式可得，

$$F_1>1-(\frac{1}{|N|})\sum_{i=1}^{r}p_i \tag{19}$$

由第一章（77）式推得

$$\Pi(x)-\Pi(\frac{x}{2})<\Pi(\frac{x}{2}) \tag{20}$$

（20）式表明，数值越大的区域素数分布的密度越小，故得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i<(\frac{1}{2})(p_1+p_r)\Pi(p_r) \tag{21}$$

由第一章（81）式可得

$$\Pi(p_r)<2(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{22}$$

由（21）和（22）式可得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i<\frac{(p_1+p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{23}$$

将（23）代入（19）式可得：

$$F_1>1-\frac{(p_1+p_r)p_r}{|N|\ln p_r} \tag{24}$$

将（24）代入（18）式可得：

$$|N_B|>F_2\prod_{j=t+1}^{r}(\frac{p_j-2f}{p_j}) \tag{25}$$

$$F_2=\{\frac{|N|}{2}-\frac{(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{t}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{26}$$

将 $\frac{|N|}{2}$ 作以下变换

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})(\frac{p_2}{p_3-2}) \tag{27}$$

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})(\frac{p_3}{p_4-2}) \tag{28}$$

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})(\frac{p_4}{p_5-2})+\frac{|N|}{p_5-2} \tag{29}$$

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})(\frac{p_5}{p_6-2}) \tag{30}$$

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})(\frac{p_6}{p_7-2})+\frac{|N|}{p_7-2} \tag{31}$$

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})(\frac{p_7}{p_8-2}) \tag{32}$$

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})(\frac{p_8}{p_9-2})+\frac{|N|}{p_9-2} \tag{33}$$

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})(\frac{p_9}{p_{10}-2})+\frac{2|N|}{p_{10}-2} \tag{34}$$

将（27），（28），...，（34）式逐次代入可得

$$\frac{|N|}{2}=(\frac{|N|}{2})\prod_{i=3}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+F_3 \tag{35}$$

$$F_3=(\frac{|N|}{p_5-2})\prod_{i=6}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{|N|}{p_7-2})\prod_{i=8}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{|N|}{p_9-2})(\frac{p_9}{p_{10}-2})+\frac{2|N|}{p_{10}-2} \tag{36}$$

将 $p_5=11$，$p_6=13$，$p_7=17$，$p_8=19$，$p_9=23$，$p_{10}=29$ 代入（36）式可得

$$F_3=0.24|N| \tag{37}$$

将（37）代入（35）再将（35）代入（26）式可得

$$F_2=\{(\frac{|N|}{2})\prod_{i=3}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+F_4\}\prod_{i=2}^{t}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{38}$$

$$F_4=0.24|N|-\frac{(p_1+p_r)p_r}{2\ln p_r} \tag{39}$$

将（4）式代入（39）式得

$$F_4 \geqslant 0.24(p_r{}^2 - 2p_r) - \frac{(p_1 + p_r)p_r}{2\ln p_r}$$

令 $$F_5 = 0.24(p_r - 2) - \frac{(p_1 + p_r)}{2\ln p_r} \quad (40)$$

得 $$F_4 \geqslant F_5 p_r \quad (41)$$

$$\frac{\mathrm{d}F_5}{\mathrm{d}p_r} = 0.24 - (\frac{1}{2})\{\frac{\ln p_r - (p_1 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\} =$$

$$0.24 - \frac{1}{2\ln p_r} + \frac{p_1 + p_r}{2p_r \ln^2 p_r} >$$

$$0.24 - \frac{1}{2\ln p_r} \quad (42)$$

令 $$0.24 - \frac{1}{2\ln p_r} > 0$$

得 $$p_r > 8.032 \quad (43)$$

将条件（43）式代入（42）式可得

$$\frac{\mathrm{d}F_5}{\mathrm{d}p_r} > 0 \qquad (p_r > 8.032) \quad (44)$$

即当 $p_r > 8.032$ 时，F_5 为 p_r 的递增函数

当 $A \geqslant \prod_{i=1}^{11} p_i{}^2$ 时，$p_r > 10^{10} >> 8.032$

且 $F_5(p_r = 10^{10}) > 10^9$ 故得

$$F_5 > 10^9, \qquad (A \geqslant \prod_{i=1}^{11} p_i{}^2) \quad (45)$$

将（45）代入（41）式可得

$$F_4 > 10^9 p_r \quad (46)$$

将，（46）代入（38）式，得

$$F_2 > \frac{|N|}{6}\prod_{i=3}^{10}(\frac{p_{i-1}}{p_i})\prod_{j=11}^{t}(\frac{p_j-2}{p_j}) + 10^9 p_r \prod_{i=2}^{t}(\frac{p_i-2}{p_i}) \quad (47)$$

由于 $p_i - 2 \geqslant p_{i-1}$， $i \geqslant 3$ （48）

得：$F_2 \geqslant \frac{|N|}{6}\prod_{i=3}^{t}(\frac{p_{i-1}}{p_i}) + 10^9(\frac{p_r}{3})\prod_{i=3}^{t}(\frac{p_{i-1}}{p_i}) =$

$$\frac{|N|}{2p_t} + 10^9(\frac{p_r}{p_t}) \quad (49)$$

将（49）代入（25）式可得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{2p_t} + 10^9(\frac{p_r}{p_t})\}\prod_{j=t+1}^{r}(\frac{p_j-2f}{p_j}) \quad (50)$$

将（4）式代入（50）式得

$$|N_B| > \{p_r^{\ 2} + 2(10^9-1)p_r\}(\frac{1}{2p_t})\prod_{j=t+1}^{r}(\frac{p_j-2f}{p_j}) \quad (51)$$

令 $\lambda = 2(10^9 - 1)$ （52）

$$\varepsilon = \frac{1}{2p_t} \quad (53)$$

$$H = \prod_{j=t+1}^{r}(\frac{p_j-2f}{p_j}) \quad (54)$$

得 $|N_B| > (p_r^{\ 2} + \lambda p_r)\varepsilon H$ （55）

当 f，d 和 p_t 都保持不变的情况下，根据（3）式条件，p_r 还可以选择更大的数值。由于 $p_{r+1} > p_r > dp_t$ ，故完全可以选用 p_{r+1} 取代 p_r，即取 $A = p_{r+1}^{\ 2}$。同上推导过程可得筛函数的下界表达式：

$$|N_{B1}| > \{p_{r+1}{}^2 + 2(10^9 - 1)p_{r+1}\}(\frac{1}{2p_t})\prod_{j=t+1}^{r+1}(\frac{p_j - 2f}{p_j}) \quad (56)$$

将（52），（53）和（54）式代入（56）式，可得

$$|N_{B1}| > (p_{r+1}{}^2 + \lambda p_{r+1})\varepsilon H(\frac{p_{r+1} - 2f}{p_{r+1}}) \quad (57)$$

设在 p_r 处，相邻素数的平均间距为 d，则得

$$d = p_{r+1} - p_r \quad (58)$$

$$|N_{B1}| > \{(d + p_r)^2 + \lambda(d + p_r)\}\varepsilon H(\frac{p_{r+1} - 2f}{p_{r+1}}) =$$

$$(p_r{}^2 + \lambda p_r)\varepsilon H(1 - \frac{2f}{p_{r+1}}) +$$

$$(d^2 + 2dp_r + \lambda d)\varepsilon H(\frac{p_{r+1} - 2f}{p_{r+1}}) =$$

$$(p_r{}^2 + \lambda p_r)\varepsilon H - (p_r{}^2 + \lambda p_r)(\frac{\varepsilon H 2f}{p_{r+1}}) +$$

$$(d^2 + 2dp_r + \lambda d)(p_r + d)(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}) -$$

$$(d^2 + 2dp_r + \lambda d)2f(\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}}) =$$

$$(p_r{}^2 + \lambda p_r)\varepsilon H + (\frac{\varepsilon H}{p_{r+1}})M \quad (59)$$

$$M = (d^2 + 2dp_r + \lambda d)(d - 2f) +$$

$$(d^2 + 2dp_r + \lambda d)p_r - (p_r{}^2 + \lambda p_r)2f =$$

$$(d^2 + 2dp_r + \lambda d)(d - 2f) +$$

$$dp_r{}^2 + d^2 p_r + (p_r{}^2 + \lambda p_r)(d - 2f) \quad (60)$$

由第一章（77）式可知

$$\Pi(p_r)=\eta(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{61}$$

$$\Pi(p_{r+1})=\eta(\frac{p_{r+1}}{\ln p_{r+1}}) \tag{62}$$

（62）式和（61）式两端相减可得

$$1=\frac{\eta p_{r+1}\ln p_r-\eta p_r\ln p_{r+1}}{\ln p_{r+1}\ln p_r}$$

$$\eta p_{r+1}\ln p_r-\eta p_r\ln p_{r+1}=\ln p_{r+1}\ln p_r \tag{63}$$

由于 $\ln p_{r+1}>\ln p_r$

故知：

$$\eta p_{r+1}\ln p_{r+1}-\eta p_r\ln p_{r+1}>\eta p_{r+1}\ln p_r-\eta p_r\ln p_{r+1} \tag{64}$$

由（63）和（64）式可得

$$\eta(p_{r+1}-p_r)>\ln p_r \tag{65}$$

令 $\frac{\ln p_r}{\eta}>2f$

得 $p_r>\mathrm{e}^{2f\eta}$ （66）

将条件（66）式代入（65）式可得

$$p_{r+1}-p_r>2f \qquad (p_r>\mathrm{e}^{2f\eta}) \tag{67}$$

将（67）式代入（58）式可得

$$d>2f \qquad (p_r>\mathrm{e}^{2f\eta}) \tag{68}$$

将（68）式代入（60）式得

$$M>dp_r^{\ 2}+d^2p_r \tag{69}$$

将（69）式代入（59）式可得

$$|N_{B1}|>\{p_r^{\ 2}+(\lambda+d)p_r\}\varepsilon H \tag{70}$$

比较（70）式与（55）式可知，$|N_{B1}|$的下界值大于$|N_B|$的下界值。即是说，$|N_B|$的下界值随着p_r的增大而增大，而且相

关增量d根据（58）和（65）式可知，亦为p_r的递增函数。p_r是没有固定上界限制的量（见（3）式），能够随意选取，故总可以选择到合适的p_r，以至获得下面的筛函数下界值：

$$|N_B|>1 \tag{71}$$

13.1.2　通过子集N_B求解

从子集N_B中任取一元素x_0，再引入参量：

$$y_0=x_0-2 \tag{72}$$

$$x_k=x_0-kd\,,\qquad k=1,2,\dots,f-1 \tag{73}$$

$$y_k=x_0-kd-2\,,\qquad k=1,2,\dots,f-1 \tag{74}$$

由其定义可知

$$x_0\in E\,,\qquad x_0>1 \tag{75}$$

$$y_0\in E\,,\qquad y_0>1 \tag{76}$$

$$x_k\in E\,,\qquad x_k>1\,,\qquad k=1,2,\dots,f-1 \tag{77}$$

$$y_k\in E\,,\qquad y_k>1\,,\qquad k=1,2,\dots,f-1 \tag{78}$$

以集合P中各元素为模数，求得同余式组：

$$x_0\equiv x_{0i}\ (\bmod p_i)\,,\qquad i=1,2,\dots,r$$

$$y_0\equiv y_{0i}\ (\bmod p_i)\,,\qquad i=1,2,\dots,r$$

$$x_k\equiv x_{ki}\ (\bmod p_i)\,,\qquad i=1,2,\dots,r$$

$$k=1,2,\dots,f-1$$

$$y_k\equiv y_{ki}\ (\bmod p_i)\qquad i=1,2,\dots,r$$

$$k=1,2,\dots,f-1$$

由于$x_0\in N_B$，根据筛选条件（5），（6）式可知

$$x_{0i}\neq 0\,,\qquad i=1,2,\dots,r \tag{79}$$

$$x_{0i}\neq 2\,,\qquad i=1,2,\dots,r \tag{80}$$

$$x_{0i} \not\equiv kd \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (81)$$
$$k=1,2,\ldots,f-1$$

$$x_{0i} \not\equiv kd+2 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (82)$$
$$k=1,2,\ldots,f-1$$

依据同余式的性质，由（72），（73），（74）式推得

$$y_{0i} \equiv x_{0i}-2 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (83)$$

$$x_{ki} \equiv x_{0i}-kd \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (84)$$
$$k=1,2,\ldots,f-1$$

$$y_{ki} \equiv x_{0i}-kd-2 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (85)$$
$$k=1,2,\ldots,f-1$$

由（80）式和（83）式可知

$$y_{0i} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (86)$$

由于对模 p_i 不同余的两个数之间的差值必然不能被模 p_i 整除，故从（81）式和（84）式可知

$$x_{ki} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (87)$$
$$k=1,2,\ldots,f-1$$

由（82）式和（85）式可知

$$y_{ki} \neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad (88)$$
$$k=1,2,\ldots,f-1$$

根据第一章引理 3

由（75）和（79）式可知：x_0 为奇素数。

由（76）和（86）式可知：y_0 为奇素数。

由（77）和（87）式可知：x_k 为奇素数 $(k=1,2,\ldots,f-1)$。

由（78）和（88）式可知：y_k 为奇素数 $(k=1,2,\ldots,f-1)$。

结合（72）式、（73）式和（74）式可知，$x_0,x_1,\ldots,x_{f-1}$ 和 $y_0,y_1,\ldots,y_{f-1}$ 皆为奇素数组成的等差级数。

另外，由（72），（73）和（74）式可以求得：

$$y_k = x_k - 2\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots,f-1 \tag{89}$$

（89）式表明，该两组等差级数

$x_0, x_1, \ldots, x_{f-1}$

$y_0, y_1, \ldots, y_{f-1}$

即为“孪生素数组成的双等差级数”，其项数为f。

已知x_0为集合N_B中的任一元素，故N_B中的每个元素都对应一组“孪生素数组成的双等差级数”。其项数f为未定量，可以任意给定，没有上界限制。

13.2　求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示三个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<%dim n1,n
n1=request.form("a")
n=0
if n1<>"" then
    n=clng(n1)
end if
%>

<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数组成的双等差级数</title>
```

```
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
var a=form1.a.value;
if(a==""||a==null){
     alert("请输入一个项数 f(大于 3)! ");
     form1.a.focus();
     return;
}else if(parseInt(a)<3){
     alert("请输入一个项数 f(大于 3)! ");
     form1.a.select();
     form1.a.focus();
     return;
}form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
孪生素数组成的双等差级数</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的整数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="input.asp">
  <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
     <tr>
       <td width="232" align="right">请输入一个项数 f(大于
3)：</td>
```

```
        <td width="248"><input name="a" type="text" id="a"></td>
      </tr>
  <tr>
         <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
               
            <input type="reset" name="Submit2" value="重置
"></td>
      </tr>
    </table>
  </form>
  <form name="form2" method="post" action="input2.asp">
   <input name="thea" type="hidden" id="thea" value="">
   <input name="n" type="hidden" id="n" value="">
   <input name="pt" type="hidden" id="pt" value="">
  </form>
  <p align="center"> </p>
  </body>
  </html>
  <script language="JavaScript">
  var n=parseInt("<%=n%>");
  n=n*2
  if(n!=0){
   var i,j,flag,pt
   for(i=n+1;true;i++){
        flag=1;
        for(j=2;j<=(i/2);j++)
        {
            if(i%j==0)
            {
                flag=0;
```

```
                        break;
                    }
                }
                if(flag==1){
                    pt=i;
                    break;
                }
    }
    var array_pi = new Array();
    i=0;
    var pi
    for(pi=2;pi<=pt;pi++)
    {//alert(array_pi[i]);
        flag=1;
        for(j=2;j<=(pi/2);j++)
        {
            if(pi%j==0)
            {
                flag=0;
                break;
            }
        }
        if(flag==1)
        {
            array_pi[i]=pi;
            i++;
        }
    }
    var d=1;
    for(i=0;i<array_pi.length;i++){
        d=d*array_pi[i];
```

```
 }
 var thea=d*d*pt*pt;
 //alert("pt="+pt+"n="+n);
 form2.thea.value=thea;
 form2.n.value=n;
 form2.pt.value=pt;
 form2.submit();
}
</script>
```

第二个文件（input2.asp）：

```
<%
dim thea,n,pt
thea=request("thea")
n=request("n")
pt=request("pt")
%>
<html>
<head>
<meta        http-equiv="Content-Type"        content="text/html;
charset=gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数组成的双等差级数</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
 var thea=parseInt("<%=thea%>");
 var a=form1.a.value;
 if(a==""||a==null){
      alert("请输入任一正整数（大于"+thea+"）！ ");
```

```
        form1.a.focus();
        return;
    }/*else if(parseInt(a)<thea){
        alert("输入的整数必须是大于"+thea+"的正整数！ ");
        return;
    }*/form1.submit();
   }
   </script>

   </head>

   <body bgcolor="#BFC0B6">
   <p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
孪生素数组成的双等差级数</strong></font></p>
   <p align="center"> </p>
   <p align="center"> </p>
   <p align="center">如果您输入的整数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！<br>
     <br>
     <a href="input.asp">重输入项数</a></p>
   <form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
     <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
       <tr>
         <td width="232" align="right">请输入任一正整数（大
于<%=thea%>）：</td>
         <td width="248"><input name="a" type="text" id="a">
      <input name="n" type="hidden" id="n" value="<%=n%>">
      <input name="pt" type="hidden" id="pt" value="<%=pt%>
"></td>
```

```
        </tr>
    <tr>
            <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
                 
              <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
        </tr>
      </table>
    </form>
    <p align="center"> </p>
    </body>
    </html>
```

第三个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
n=request.form("n")
pt=request.form("pt")
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数组成的双等差级数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size
="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点击
“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
```

```
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000"  size="5"><strong>孪生素数组成的双等差级数
求解运算结果</strong></font><br><br>
<a href="input.asp">重输入项数</a><br>
  <br>
  <a href="javascript:history.go(-1);">重输入 a</a></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3,d,t,d1,maxk, theitems;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_n = new Array();
var array_k = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<10000)
{
    document.write("输入错误！ ");
}else{
document.write("<font  color=#FF0000  size='4'>输入的整数 a 为：
</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"     ");
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
n=parseInt("<%=n%>");
```

```
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的项数 f
为：</font><font color=#8000FF size=4>"+(n/2)+"<br>");
var pt=parseInt("<%=pt%>");
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
{//alert(array_pi[i]);
 flag=1;
 for(j=2;j<=(pi/2);j++)
 {
       if(pi%j==0)
       {
             flag=0;
             break;
       }
 }
 if(flag==1)
 {
       //ni=n%pi;
       //array_ni[i]=ni;
       array_pi[i]=pi;
       //array_pi2[i]=pi;
       //array_ai[i]=a%pi;
       //array_pi_ni[i]=pi-ni
       //alert(array_pi[i]);
       i++;
 }
```

```
}

ther=i;

j=0;
for(i=((2*pr)+1);i<=a;i++){
 array_n[j]=i;
 //alert(array_n[i]);
 j++;
}
d1=1;
d=1;
/*for(i=parseInt(ther/3);i>=2;i--){
 d1=1;
 for(j=i;j>=0;j--){
       d1=d1*array_pi[j];
 }*/
for(i=0;array_pi[i]<=pt;i++){
 d=d*array_pi[i];
 /*if(d1>pr){
       t=i-2;
       d=(d1/array_pi[i])/array_pi[i-1];
       maxk=(array_pi[i-1]-5)/2;
       //theitems=maxk-1;
       break;
 }*/
}
//alert("d="+d+"theitems="+theitems);
maxk=(n/2)-1;
for(i=0;i<=maxk;i++){
 array_k[i]=i;
```

```
    }

    for(i=0;i<array_n.length;i++){
     for(j=0;j<array_k.length;j++){
          flag=1;
          for(thep=0;thep<array_pi.length;thep++){

     if((array_n[i]%array_pi[thep]==(d*array_k[j])%(array_pi[thep]
))||(array_n[i]%array_pi[thep]==((d*array_k[j])+2)%(array_pi[thep]
))){
                    array_n[i]=0;
                    flag=0;
                    break;
               }
          }
          if(flag==0){ break;}
     }
    }

    xx=0;
    for(i=0;i<array_n.length;i++){
     if(array_n[i]>0){
          xx++;
     }
    }//alert("xx="+xx);
    if(xx>0){
     document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合N
中求得的孪生素数组成的双等差级数的组数为：</font>" + xx +
"<br>");
     document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合N中求
得的孪生素数组成的双等差级数为：</font><br>");
```

```
    var thearrays=1;
    for(i=0;i<array_n.length;i++)
    {
        if(array_n[i]>0)
        {
            //document.write("<font  size='4'> 第 "+(thearrays)+"
组：</font><br>");
            thearrays++;
            m=0;
            document.write("<font  size='4'  class='parametercss'>x
</font>0="+(array_n[i])+" <font  size='4'  class='parametercss'>
y</font>0="+(array_n[i]-2)+"  ");
            for(j=1;j<array_k.length;j++){
                document.write("<font size='4' class='parametercss'
>x</font>"+j+"="+(array_n[i]-(d*array_k[j]))+" <font  size='4'
class='parametercss'>y</font>"+j+"="+(array_n[i]-(d*array_k[j])-2)+"
  ");
                if(m%2==0)
                {
                  document.write("<br>");

                }
                 m++;
            }document.write("<br>");
        }

    }
   }

   document.all("wait_div").style.display="none";
   document.all("wait2_div").style.display="";
```

```
}
</script>
</p></body>
</html>
```

13.3　实筛数据

输入的整数 a 为：150000　　输入的项数 f 为：4

从集合 N 中求得的孪生素数组成的双等差级数的组数为：19

从集合 N 中求得的孪生素数组成的双等差级数为：

x0=1291 y0=1289 x1=-1019 y1=-1021
x2=-3329 y2=-3331 x3=-5639 y3=-5641

x0=1453 y0=1451 x1=-857 y1=-859
x2=-3167 y2=-3169 x3=-5477 y3=-5479

x0=5479 y0=5477 x1=3169 y1=3167
x2=859 y2=857 x3=-1451 y3=-1453

x0=5641 y0=5639 x1=3331 y1=3329
x2=1021 y2=1019 x3=-1289 y3=-1291

x0=7591 y0=7589 x1=5281 y1=5279
x2=2971 y2=2969 x3=661 y3=659

x0=7951 y0=7949 x1=5641 y1=5639
x2=3331 y2=3329 x3=1021 y3=1019

x0=8863 y0=8861 x1=6553 y1=6551
x2=4243 y2=4241 x3=1933 y3=1931

x0=11173 y0=11171 x1=8863 y1=8861

$x2=6553$ $y2=6551$ $x3=4243$ $y3=4241$

$x0=21523$ $y0=21521$ $x1=19213$ $y1=19211$
$x2=16903$ $y2=16901$ $x3=14593$ $y3=14591$

$x0=23833$ $y0=23831$ $x1=21523$ $y1=21521$
$x2=19213$ $y2=19211$ $x3=16903$ $y3=16901$

$x0=27481$ $y0=27479$ $x1=25171$ $y1=25169$
$x2=22861$ $y2=22859$ $x3=20551$ $y3=20549$

$x0=28309$ $y0=28307$ $x1=25999$ $y1=25997$
$x2=23689$ $y2=23687$ $x3=21379$ $y3=21377$

$x0=38653$ $y0=38651$ $x1=36343$ $y1=36341$
$x2=34033$ $y2=34031$ $x3=31723$ $y3=31721$

$x0=61333$ $y0=61331$ $x1=59023$ $y1=59021$
$x2=56713$ $y2=56711$ $x3=54403$ $y3=54401$

$x0=71809$ $y0=71807$ $x1=69499$ $y1=69497$
$x2=67189$ $y2=67187$ $x3=64879$ $y3=64877$

$x0=86629$ $y0=86627$ $x1=84319$ $y1=84317$
$x2=82009$ $y2=82007$ $x3=79699$ $y3=79697$

$x0=89821$ $y0=89819$ $x1=87511$ $y1=87509$
$x2=85201$ $y2=85199$ $x3=82891$ $y3=82889$

$x0=129529$ $y0=129527$ $x1=127219$ $y1=127217$
$x2=124909$ $y2=124907$ $x3=122599$ $y3=122597$

$x0$=131839 $y0$=131837　$x1$=129529 $y1$=129527
$x2$=127219 $y2$=127217　$x3$=124909 $y3$=124907

输入的整数 a 为：200000　　输入的项数 f 为：5
从集合 N 中求得的孪生素数组成的双等差级数的组数为：5
从集合 N 中求得的孪生素数组成的双等差级数为：
$x0$=1291 $y0$=1289　$x1$=-1019 $y1$=-1021
$x2$=-3329 $y2$=-3331　$x3$=-5639 $y3$=-5641
$x4$=-7949 $y4$=-7951

$x0$=7951 $y0$=7949　$x1$=5641 $y1$=5639
$x2$=3331 $y2$=3329　$x3$=1021 $y3$=1019
$x4$=-1289 $y4$=-1291

$x0$=11173 $y0$=11171　$x1$=8863 $y1$=8861
$x2$=6553 $y2$=6551　$x3$=4243 $y3$=4241
$x4$=1933 $y4$=1931

$x0$=23833 $y0$=23831　$x1$=21523 $y1$=21521
$x2$=19213 $y2$=19211　$x3$=16903 $y3$=16901
$x4$=14593 $y4$=14591

$x0$=131839 $y0$=131837　$x1$=129529 $y1$=129527
$x2$=127219 $y2$=127217　$x3$=124909 $y3$=124907
$x4$=122599 $y4$=122597

第十四章　递减的素数间隙

d_n 表示相邻素数的差值，亦即

$$d_n = p_{n+1} - p_n$$

Erdos 和 Turan 证明了符合条件"$d_n > d_{n+1}$"的素数有无穷多组。但尚不知符合条件"$d_n > d_{n+1} > d_{n+2}$"的素数是否也有无穷多组。本章将讨论这一问题。

14.1　求解证明

设 A 为大于 12000 的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leqslant A^{1/2} \tag{1}$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示，$N = (p_r + 1, p_r + 2, \ldots, A)$ 则集合 N 的基数 $|N|$ 为

$$|N| = A - p_r \geq p_r^{\ 2} - p_r \tag{2}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g \equiv 1 \pmod{p_1} \tag{3}$$

$$g \equiv 1 \pmod{p_2} \tag{4}$$

$$g \equiv 3 \pmod{p_3} \tag{5}$$

$$g \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \qquad i = 4, 5, \ldots, r \tag{6}$$

$$g \neq 2 \pmod{p_i}, \qquad i = 4,5,\ldots,r \tag{7}$$

$$g \neq 6 \pmod{p_i}, \qquad i = 4,5,\ldots,r \tag{8}$$

$$g \neq 12 \pmod{p_i}, \qquad i = 4,5,\ldots,r \tag{9}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合条件（3）~（9）式的所有元素分选出来,组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

14.1.1 求证筛函数的下界

被筛集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数，根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{10}$$

根据第一章的（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N|\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{p_i}{|N|}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{11}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数，下面具体分析确定 α_i 的数值。

当 $i \leqslant 3$ 时，由筛选条件（3），（4），（5）式可知集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的一个同余类子集符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = 1, \qquad i = 1,2,3 \tag{12}$$

当 $i > 3$，　$p_i \geqslant p_4 = 7$

数组 0，2，6，12 中的各元素每两两之间对模 p_i 皆不同余，（6），（7），（8），（9）式对应于四个不同的同余类子集，此时，集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的 $(p_i - 4)$ 个同余类子集符合筛选条

件，故得

$$\alpha_i = p_i - 4\,, \qquad i = 4,5,\ldots,r \tag{13}$$

将（12）和（13）式代入（10）式，可得

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{3}(\frac{1}{p_i})\prod_{j=4}^{r}(\frac{p_j - 4}{p_j}) \tag{14}$$

将（12）和（13）式代入（11）式，可得

$$|N_B| > F_1|N|\prod_{i=1}^{3}(\frac{1}{p_i})\prod_{j=4}^{r}(\frac{p_j - 4}{p_j}) \tag{15}$$

$$F_1 = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{p_i}{|N|}) > 1 - \frac{1}{|N|}\sum_{i=1}^{r} p_i \tag{16}$$

由第一章（77）式推得

$$\Pi(x) - \Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \tag{17}$$

（17）式表明数值越大的区域素数分布的密度越小，由此可得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = \sum_{i=1}^{4} p_i + \sum_{i=5}^{r} p_i <$$

$$17 + (\frac{1}{2})(p_5 + p_r)\{\Pi(p_r) - 4\} \tag{18}$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r) < (6\ln 2)\frac{p_r}{\ln p_r} \tag{19}$$

将（19）代入（18）式可得

$$\sum_{i=1}^{r} p_i < 17 - 2(p_5 + p_r) + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{20}$$

将（20）代入（16）式，可得

$$F_1 > 1 + \frac{2(p_5 + p_r)}{|N|} - \{\frac{17}{|N|} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{|N|\ln p_r}\} \quad (21)$$

将（21）代入（15）式，可得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{30} + F_2\}\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \quad (22)$$

$$F_2 = \frac{2(p_5 + p_r)}{30} - \{\frac{17}{30} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30\ln p_r}\} \quad (23)$$

将$|N|$作以下变换

$$|N| = |N|\{p_{11}/(p_{13} - 4)\} + 6|N|/(p_{13} - 4) \quad (24)$$

$$|N| = |N|\{p_{12}/(p_{14} - 4)\} + 2|N|/(p_{14} - 4) \quad (25)$$

$$|N| = |N|\{p_{13}/(p_{15} - 4)\} + 2|N|/(p_{15} - 4) \quad (26)$$

$$|N| = |N|\{p_{14}/(p_{16} - 4)\} + 6|N|/(p_{16} - 4) \quad (27)$$

$$|N| = |N|\{p_{15}/(p_{17} - 4)\} + 8|N|/(p_{17} - 4) \quad (28)$$

$$|N| = |N|\{p_{16}/(p_{18} - 4)\} + 4|N|/(p_{18} - 4) \quad (29)$$

$$|N| = |N|\{p_{17}/(p_{19} - 4)\} + 4|N|/(p_{19} - 4) \quad (30)$$

$$|N| = |N|\{p_{18}/(p_{20} - 4)\} + 6|N|/(p_{20} - 4) \quad (31)$$

$$|N| = |N|\{p_{19}/(p_{21} - 4)\} + 2|N|/(p_{21} - 4) \quad (32)$$

$$|N| = |N|\{p_{20}/(p_{22} - 4)\} + 4|N|/(p_{22} - 4) \quad (33)$$

$$|N| = |N|\{p_{21}/(p_{23} - 4)\} + 6|N|/(p_{23} - 4) \quad (34)$$

$$|N| = |N|\{p_{22}/(p_{24} - 4)\} + 6|N|/(p_{24} - 4) \quad (35)$$

$$|N| = |N|\{p_{23}/(p_{25} - 4)\} + 10|N|/(p_{25} - 4) \quad (36)$$

$$|N| = |N|\{p_{24}/(p_{26} - 4)\} + 8|N|/(p_{26} - 4) \quad (37)$$

$$|N| = |N|\{p_{25}/(p_{27} - 4)\} + 2|N|/(p_{27} - 4) \quad (38)$$

$$|N|=|N|\{p_{26}/(p_{28}-4)\}+2|N|/(p_{28}-4) \tag{39}$$

将（24），（25），…（39）式逐次代入右端第一项，得

$$|N|=|N|\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+F_3 \tag{40}$$

$$\begin{aligned}F_3=&(\frac{6|N|}{p_{13}-4})\prod_{i=14}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{2|N|}{p_{14}-4})\prod_{i=15}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+\\&(\frac{2|N|}{p_{15}-4})\prod_{i=16}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{6|N|}{p_{16}-4})\prod_{i=17}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+\\&(\frac{8|N|}{p_{17}-4})\prod_{i=18}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{4|N|}{p_{18}-4})\prod_{i=19}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+\\&(\frac{4|N|}{p_{19}-4})\prod_{i=20}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{6|N|}{p_{20}-4})\prod_{i=21}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+\\&(\frac{2|N|}{p_{21}-4})\prod_{i=22}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{4|N|}{p_{22}-4})\prod_{i=23}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+\\&(\frac{6|N|}{p_{23}-4})\prod_{i=24}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{6|N|}{p_{24}-4})\prod_{i=25}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+\\&(\frac{10|N|}{p_{25}-4})\prod_{i=26}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{8|N|}{p_{26}-4})\prod_{i=27}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+\\&(\frac{2|N|}{p_{27}-4})(\frac{p_{26}}{p_{28}-4})+\frac{2|N|}{p_{28}-4}\end{aligned} \tag{41}$$

将 $P_{12}=37$，$P_{13}=41$，$P_{14}=43$，$P_{15}=47$，$P_{16}=53$，$P_{17}=59$，$P_{18}=61$，$P_{19}=67$，$P_{20}=71$，$P_{21}=73$，$P_{22}=79$，$P_{23}=83$，$P_{24}=89$，$P_{25}=97$，$P_{26}=101$，$P_{27}=103$，$P_{28}=107$ 代入（41）式，得

$$F_3=0.72|N| \tag{42}$$

将（42）代入（40）式，得

$$|N| = |N|\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4}) + 0.72|N| \tag{43}$$

将（43）代入（22）式，得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{30}\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4}) + F_4\}\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i - 4}{p_i}) \tag{44}$$

$$F_4 = \frac{0.72|N|}{30} + \frac{2(p_5 + p_r)}{30} - \{\frac{17}{30} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30\ln p_r}\} =$$

$$\frac{0.72|N| + 2p_r + 5}{30} - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30\ln p_r} \tag{45}$$

将（2）式代入（45）式，得

$$F_4 > \frac{0.72{p_r}^2 + 1.28p_r}{30} - \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30\ln p_r} = F_5 p_r \tag{46}$$

$$F_5 = \frac{0.72p_r + 1.28}{30} - \frac{2.08(p_5 + p_r)}{30\ln p_r} \tag{47}$$

$$\frac{dF_5}{dp_r} = \frac{0.72}{30} - (\frac{2.08}{30})\{\frac{\ln p_r - (p_5 + p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\} =$$

$$\frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30\ln p_r} + \frac{2.08(p_5 + p_r)}{30p_r\ln^2 p_r} >$$

$$\frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30\ln p_r} \tag{48}$$

令 $\frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30\ln p_r} > 0$

得 $p_r > 17.98$ （49）

将条件（49）式代入（48）式，可得

$$\frac{dF_5}{dp_r} > 0 \qquad (p_r > 17.98) \tag{50}$$

（50）式表示，当 $p_r>17.98$ 时，F_5 为 p_r 的递增函数。

当 $A\geqslant 12000$ 时，$p_r\geqslant 109>17.98$

且 $F_5\,(p_r=109)=0.885$ 故得

$$F_5>0.88\,,\qquad A\geqslant 12000 \tag{51}$$

将（51）式代入（46）式，得

$$F_4>0.88p_r \tag{52}$$

将（52）代入（44）式，可得

$$|N_B|>\{\frac{|N|}{30}\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+0.88p_r\}\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i})>$$

$$\frac{|N|}{30}\prod_{j=13}^{28}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{53}$$

将（2）式代入（53）式，得

$$|N_B|>\frac{p_r^{\,2}-p_r}{30}\prod_{j=13}^{28}(\frac{p_{j-2}}{p_j-4})\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{54}$$

已知：$p_i-4\geq p_{i-2}$，$\qquad i>28$ （55）

由（54）和（55）式可得

$$|N_B|>(\frac{p_r^{\,2}-p_r}{30})\{\frac{(p_{11}-4)(p_{12}-4)}{p_{11}p_{12}}\}\prod_{j=4}^{10}(\frac{p_j-4}{p_j})\prod_{i=13}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i})=$$

$$(\frac{p_r^{\,2}-p_r}{30})(\frac{(p_{11}-4)(p_{12}-4)}{p_{r-1}p_r})\prod_{i=4}^{10}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{56}$$

已知，$p_r\geqslant p_{r-1}+2$ 故得

$$|N_B|>\{\frac{(p_{11}-4)(p_{12}-4)}{30}\}\prod_{i=4}^{10}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{57}$$

将 $P_4=7$，$P_5=11$，$P_6=13$，$P_7=17$，$P_8=19$，$P_9=23$

$P_{10}=29$，　$P_{11}=31$，$P_{12}=37$　代入（57）式可得

$$|N_B|>2.41 \tag{58}$$

14.1.2　通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一元素 x_0 再引入参量：

$$x_2=x_0-2 \tag{59}$$

$$x_6=x_0-6 \tag{60}$$

$$x_{12}=x_0-12 \tag{61}$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组：

$$x_0 \equiv x_{0i} (\mathrm{mod}\, p_i)，\quad i=1,2,\ldots,r$$

$$x_2 \equiv x_{2i} (\mathrm{mod}\, p_i)，\quad i=1,2,\ldots,r$$

$$x_6 \equiv x_{6i} (\mathrm{mod}\, p_i)，\quad i=1,2,\ldots,r$$

$$x_{12} \equiv x_{12i} (\mathrm{mod}\, p_i)，\quad i=1,2,\ldots,r$$

根据定义式可知

$$x_0 \in E，\ x_0>1 \tag{62}$$

$$x_2 \in E，\ x_2>1 \tag{63}$$

$$x_6 \in E，\ x_6>1 \tag{64}$$

$$x_{12} \in E，\ x_{12}>1 \tag{65}$$

由于 $x_0 \in N_B$，根据筛选条件（3）~（9）式可知

$$x_{0i} \neq 0，\quad i=1,2,\ldots,r \tag{66}$$

$$x_{0i} \neq 2，\quad i=1,2,\ldots,r \tag{67}$$

$$x_{0i} \not\equiv 6\ (\mathrm{mod}\, p_i)，\quad i=1,2,\ldots,r \tag{68}$$

$$x_{0i} \not\equiv 12\ (\mathrm{mod}\, p_i)，\quad i=1,2,\ldots,r \tag{69}$$

根据同余式的性质，由（59），（60）和（61）式可推得

$$x_{2i} \equiv x_{0i}-2\ (\mathrm{mod}\, p_i)，\quad i=1,2,\ldots,r \tag{70}$$

$$x_{6i} \equiv x_{0i} - 6 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{71}$$

$$x_{12i} \equiv x_{0i} - 12 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{72}$$

由（67）和（70）式可知

$$x_{2i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{73}$$

由（68）式和（71）式可知：

$$x_{6i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{74}$$

由（69）式和（72）式可知：

$$x_{12i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{75}$$

根据第一章引理 3，由（62）和（66）式可知：x_0 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（63）式和（73）式可知：x_2 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（64）式和（74）式可知：x_6 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（65）式和（75）式可知：x_{12} 为奇素数。

再引入参量：

$$x_k = x_0 - k, \qquad k = 1,3,4,5,7,8,9,10,11 \tag{76}$$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组

$$x_k \equiv x_{ki} \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

$$k \equiv k_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

根据同余式的性质，由（76）式推得

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{77}$$

$$k = 1,3,4,5,7,8,9,10,11$$

当 $i = 1$ 时，$p_1 = 2$

$$x_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \pmod{p_1} \tag{78}$$

由筛选条件（3）式知

$$x_{01} = 1 \tag{79}$$

另有 $k_1 = 1, \qquad k = 1,3,5,7,9,11$ （80）

由（78），（79）和（80）式，可知

$$x_{k1}=0,\quad k=1,3,5,7,9,11 \tag{81}$$

（81）式表示，x_k（$k=1,3,5,7,9,11$）为复合数。

当$i=2$时，$p_2=3$

$$x_{k2}\equiv x_{02}-k_2(\bmod p_2) \tag{82}$$

由筛选条件（4）式知

$$x_{02}=1 \tag{83}$$

另有 $k_2=1$，　　$k=4,10$　　（84）

由（82），（83）和（84）式，可知

$$x_{k2}=0,\quad k=4,10 \tag{85}$$

（85）式表示，x_k（$k=4,10$）为复合数。

当$i=3$时，$p_3=5$

$$x_{k3}\equiv x_{03}-k_3(\bmod p_3) \tag{86}$$

由筛选条件（5）式可知

$$x_{03}=3 \tag{87}$$

另有 $k_3=3$，　　$k=8$　　（88）

由（86），（87）和（88）式，可知

$$x_{k3}=0,\quad k=8 \tag{89}$$

（89）式表示，x_k（$k=8$）为复合数。

综合（81）式（85）式和（89）式可知

参量x_k（$k=1,3,4,5,7,8,9,10,11$）全是复合数。

由（76）式可知，这9个复合数正是介于x_0和x_2和x_6和x_{12}之间的9个整数。所以，x_0,x_2,x_6,x_{12}为四个相邻的素数。

由（66），（73），（74）和（75）式可知，x_0,x_2,x_6,x_{12}这四个素数都大于p_r。根据定义，p_r是不超过$A^{1/2}$的最大素数，故

知这四个素数都大于 $A^{1/2}$。

由（59），（60）和（61）式可知

$$x_0 - x_2 = 2 \quad (90)$$

$$x_2 - x_6 = 4 \quad (91)$$

$$x_6 - x_{12} = 6 \quad (92)$$

由（90），（91），（92）式可见，这四个相邻素数之间的三个间隙，随着素数数值的增大而减小，故构成“素数的连续三间隙递减组合”。

因为 x_0 为集合 N_B 中任一元素，所以集合 N_B 中每个元素都对应一个“素数的连续三间隙递减组合”。由此，根据（58）式可得定律如下：

素数三间隙递减组合定律：对大于 12000 的任意正整数 A 而言，在区间（$A^{1/2}, A$）内至少有两个“素数的连续三间隙递减组合”。

14.2 素数三间隙递减组合的无限性

根据前节得出的定律可知，在区间（$A^{1/2}, A$）（A>12000）内至少有两个“素数的连续三间隙递减组合”，同理在区间（A, A^2）内至少也有两个“素数的连续三间隙递减组合”，在区间（A^2, A^4）内还至少有两个“素数的连续三间隙递减组合”……依次类推，当 A 的指数趋于无穷时，“素数的连续三间隙递减组合”必定有无穷多个。

14.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>递减的素数间隙</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
            var a=form1.a.value;
            if(a==""||a==null){
                alert("请输入一个数字（100 以上）！");
                return;
            }else if(parseInt(a)<100){
                alert("输入的数字必须大于 100！");
                return;
            }form1.submit();
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
递减的素数间隙求解程序</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较长，
请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
```

```
<table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
    <tr>
      <td width="202" align="right">请输入一个数字（100
以上）：</td>
      <td width="278"><input name="a" type="text" id="a">
</td>
    </tr>
        <tr>
      <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
           
        <input type="reset" name="Submit2" value="重置
"></td>
    </tr>
  </table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
```

```
<title>递减的素数间隙</title>
</head>
<body
bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“……是否取消该脚本？”，请点
击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>递减的素数间隙求解运算结
果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_a = new Array();
//var array_ai = new Array();
//var array_hi = new Array();
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<100)
{
    document.write("输入错误！");
}else{
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a 为：
</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
//n=parseInt(a/2);
```

```
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
{//alert(array_pi[i]);
            flag=1;
            for(j=2;j<=(pi/2);j++)
            {
                  if(pi%j==0)
                  {
                   flag=0;
                   break;
                  }
            }
            if(flag==1)
            {
                  //ni=n%pi;
                  //array_ni[i]=ni;
                  array_pi[i]=pi;
                  //array_pi2[i]=pi;
                  //array_ai[i]=a%pi;
                  //array_pi_ni[i]=pi-ni
                  //if(i<6)
                  //alert(array_pi[i]);
                  //document.write(array_pi[i]+" ");
```

```
                    i++;
                }
    }
    //document.write("<br>");
    //alert(array_pi[i-1]);
    ther=i;
    //alert(a-array_pi[ther-1]);

    for(i=(array_pi[ther-1]+1),j=0;i<=a;i++,j++){
                array_a[j]=i;
                //if(i<450)
                //alert(array_a[i]);
                //document.write(array_a[i]+" ");
                //alert(array_n[i]);
    }//alert(array_a.length);
    //document.write("<br>");
    theflag=0;
    for(i=0;i<array_a.length;i++)
    {
                theflag=0;
                if((array_a[i]%array_pi[0]==1)&&(array_a[i]%array_
pi[1]==1)&&(array_a[i]%array_pi[2]==3)){
                    //alert(array_pi[0]+"                "+array_pi[1]+"
"+array_pi[2]+" "+array_pi[3]);
                    //alert(array_a[i]);
                    theflag=1;
                }
                if(theflag==1){
                    for(k=3;k<array_pi.length;k++){

                if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[
k]==2)||(array_a[i]%array_pi[k]==6)||((array_a[i]%array_pi[k])==(1
```

```
2%array_pi[k]))){
                        array_a[i]=0;
                        break;
                    }
                  }
            }else{
                array_a[i]=0;
            }
    }
    x=0;
    for(i=0;i<array_a.length;i++){
            if(array_a[i]>0){
                //document.write(array_a[i]+" ");
                x++;
            }
            //alert(array_n[i]);
    }

    document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的解的组数为：</font>" + x + "<br>");
    if(x>0){
            document.write("<font color=#0000FF size=3>从集
合 N 中求得的解为：</font><br>");
            var astr=new String(a);
            var thelength=astr.length;
            var x11,x22,x33,x44;
            m=1;
            for(i=0;i<array_a.length;i++)
            {
               switch(array_a[i])
               {
```

```
case 0: break;
default:
     x1=array_a[i];
  x2=array_a[i]-2;
  x3=array_a[i]-6;
  x4=array_a[i]-12;

  x11=new String(x1);
  for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
       x11="0"+""+x11;
  }
  x22=new String(x2);
  for(var iii=x22.length;iii<thelength;iii++){
       x22="0"+""+x22;
  }
  x33=new String(x3);
  for(var iii=x33.length;iii<thelength;iii++){
       x33="0"+""+x33;
  }
  x44=new String(x4);
  for(var iii=x44.length;iii<thelength;iii++){
       x44="0"+""+x44;
  }
  document.write("<font                size='4'
class='parametercss'>x</font>0="+x11+"  <font
size='4'
class='parametercss'>x</font>2="+x22+"  <font
size='4'
class='parametercss'>x</font>6="+x33+"  <font
size='4' class='parametercss'>x</font>12="+x44);
  if(m%1==0)
```

```
                    {
                      document.write("<br>");

                    }
                     m=m+1;
                }

            }
    }


    document.all("wait_div").style.display="none";
    document.all("wait2_div").style.display="";
    }
    </script>
    </p></body>
    </html>
```

14.4 实筛数据

输入的数 a 为：10000

从集合 N 中求得的解的组数为：9

从集合 N 中求得的解为：

$x0$=00283 $x2$=00281 $x6$=00277 $x12$=00271

$x0$=01303 $x2$=01301 $x6$=01297 $x12$=01291

$x0$=01873 $x2$=01871 $x6$=01867 $x12$=01861

$x0$=02143 $x2$=02141 $x6$=02137 $x12$=02131

$x0$=02383 $x2$=02381 $x6$=02377 $x12$=02371

$x0$=02803 $x2$=02801 $x6$=02797 $x12$=02791

$x0$=05443 $x2$=05441 $x6$=05437 $x12$=05431

$x0$=05653 $x2$=05651 $x6$=05647 $x12$=05641

$x0$=09013 $x2$=09011 $x6$=09007 $x12$=09001

输入的数 a 为：100000

从集合 N 中求得的解的组数为：35

从集合 N 中求得的解为：

$x0$=001303 $x2$=001301 $x6$=001297 $x12$=001291

$x0$=001873 $x2$=001871 $x6$=001867 $x12$=001861

$x0$=002143 $x2$=002141 $x6$=002137 $x12$=002131

$x0$=002383 $x2$=002381 $x6$=002377 $x12$=002371

$x0$=002803 $x2$=002801 $x6$=002797 $x12$=002791

$x0$=005443 $x2$=005441 $x6$=005437 $x12$=005431

$x0$=005653 $x2$=005651 $x6$=005647 $x12$=005641

$x0$=009013 $x2$=009011 $x6$=009007 $x12$=009001

$x0$=011833 $x2$=011831 $x6$=011827 $x12$=011821

$x0$=013693 $x2$=013691 $x6$=013687 $x12$=013681

$x0$=014563 $x2$=014561 $x6$=014557 $x12$=014551

$x0$=018133 $x2$=018131 $x6$=018127 $x12$=018121

$x0$=018313 $x2$=018311 $x6$=018307 $x12$=018301

$x0$=021493 $x2$=021491 $x6$=021487 $x12$=021481

$x0$=027283 $x2$=027281 $x6$=027277 $x12$=027271

$x0$=035533 $x2$=035531 $x6$=035527 $x12$=035521

$x0$=036793 $x2$=036791 $x6$=036787 $x12$=036781

$x0$=037573 $x2$=037571 $x6$=037567 $x12$=037561

$x0$=041233 $x2$=041231 $x6$=041227 $x12$=041221

$x0$=042463 $x2$=042461 $x6$=042457 $x12$=042451

$x0$=050593 $x2$=050591 $x6$=050587 $x12$=050581

$x0$=055933 $x2$=055931 $x6$=055927 $x12$=055921

$x0$=057793 $x2$=057791 $x6$=057787 $x12$=057781

$x0$=062143 $x2$=062141 $x6$=062137 $x12$=062131

$x0$=070003 $x2$=070001 $x6$=069997 $x12$=069991

$x0$=070123 $x2$=070121 $x6$=070117 $x12$=070111

x0=076003 x2=076001 x6=075997 x12=075991
x0=079633 x2=079631 x6=079627 x12=079621
x0=080683 x2=080681 x6=080677 x12=080671
x0=083233 x2=083231 x6=083227 x12=083221
x0=085093 x2=085091 x6=085087 x12=085081
x0=088663 x2=088661 x6=088657 x12=088651
x0=088813 x2=088811 x6=088807 x12=088801
x0=091813 x2=091811 x6=091807 x12=091801
x0=093493 x2=093491 x6=093487 x12=093481

输入的数 a 为：200000
从集合 N 中求得的解的组数为：57
集合 N 中求得的解为：
x0=001303 x2=001301 x6=001297 x12=001291
x0=001873 x2=001871 x6=001867 x12=001861
x0=002143 x2=002141 x6=002137 x12=002131
x0=002383 x2=002381 x6=002377 x12=002371
x0=002803 x2=002801 x6=002797 x12=002791
x0=005443 x2=005441 x6=005437 x12=005431
x0=005653 x2=005651 x6=005647 x12=005641
x0=009013 x2=009011 x6=009007 x12=009001
x0=011833 x2=011831 x6=011827 x12=011821
x0=013693 x2=013691 x6=013687 x12=013681
x0=014563 x2=014561 x6=014557 x12=014551
x0=018133 x2=018131 x6=018127 x12=018121
x0=018313 x2=018311 x6=018307 x12=018301
x0=021493 x2=021491 x6=021487 x12=021481
x0=027283 x2=027281 x6=027277 x12=027271
x0=035533 x2=035531 x6=035527 x12=035521
x0=036793 x2=036791 x6=036787 x12=036781
x0=037573 x2=037571 x6=037567 x12=037561

$x0$=041233 $x2$=041231 $x6$=041227 $x12$=041221
$x0$=042463 $x2$=042461 $x6$=042457 $x12$=042451
$x0$=050593 $x2$=050591 $x6$=050587 $x12$=050581
$x0$=055933 $x2$=055931 $x6$=055927 $x12$=055921
$x0$=057793 $x2$=057791 $x6$=057787 $x12$=057781
$x0$=062143 $x2$=062141 $x6$=062137 $x12$=062131
$x0$=070003 $x2$=070001 $x6$=069997 $x12$=069991
$x0$=070123 $x2$=070121 $x6$=070117 $x12$=070111
$x0$=076003 $x2$=076001 $x6$=075997 $x12$=075991
$x0$=079633 $x2$=079631 $x6$=079627 $x12$=079621
$x0$=080683 $x2$=080681 $x6$=080677 $x12$=080671
$x0$=083233 $x2$=083231 $x6$=083227 $x12$=083221
$x0$=085093 $x2$=085091 $x6$=085087 $x12$=085081
$x0$=088663 $x2$=088661 $x6$=088657 $x12$=088651
$x0$=088813 $x2$=088811 $x6$=088807 $x12$=088801
$x0$=091813 $x2$=091811 $x6$=091807 $x12$=091801
$x0$=093493 $x2$=093491 $x6$=093487 $x12$=093481
$x0$=106543 $x2$=106541 $x6$=106537 $x12$=106531
$x0$=113023 $x2$=113021 $x6$=113017 $x12$=113011
$x0$=113173 $x2$=113171 $x6$=113167 $x12$=113161
$x0$=115783 $x2$=115781 $x6$=115777 $x12$=115771
$x0$=118903 $x2$=118901 $x6$=118897 $x12$=118891
$x0$=124303 $x2$=124301 $x6$=124297 $x12$=124291
$x0$=124783 $x2$=124781 $x6$=124777 $x12$=124771
$x0$=126493 $x2$=126491 $x6$=126487 $x12$=126481
$x0$=131713 $x2$=131711 $x6$=131707 $x12$=131701
$x0$=132763 $x2$=132761 $x6$=132757 $x12$=132751
$x0$=134593 $x2$=134591 $x6$=134587 $x12$=134581
$x0$=135283 $x2$=135281 $x6$=135277 $x12$=135271
$x0$=139303 $x2$=139301 $x6$=139297 $x12$=139291
$x0$=143833 $x2$=143831 $x6$=143827 $x12$=143821

$x0$=148933 $x2$=148931 $x6$=148927 $x12$=148921
$x0$=150223 $x2$=150221 $x6$=150217 $x12$=150211
$x0$=155383 $x2$=155381 $x6$=155377 $x12$=155371
$x0$=160093 $x2$=160091 $x6$=160087 $x12$=160081
$x0$=163993 $x2$=163991 $x6$=163987 $x12$=163981
$x0$=170353 $x2$=170351 $x6$=170347 $x12$=170341
$x0$=176053 $x2$=176051 $x6$=176047 $x12$=176041
$x0$=177433 $x2$=177431 $x6$=177427 $x12$=177421

第十五章　递增的素数间隙

素数间隙递增组合与素数间隙递减组合目前都只证明了两个间隙组合有无穷多个，三个间隙的情况尚待证明。本章将对这一问题进行讨论。

15.1　求解证明

设 A 为大于 12000 的任意正整数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示。以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P=(p_1,p_2,\dots,p_r)$$

$$2=p_1<p_2<\dots<p_r\leqslant A^{1/2} \tag{1}$$

将不超过 A 且大于 p_r 的全部正整数集合用 N 表示，$N=(p_r+1,p_r+2,\dots,A)$，则集合 N 的基数 $|N|$ 为：

$$|N|=A-p_r\geqslant p_r^{\ 2}-p_r \tag{2}$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p_1) \tag{3}$$

$$g\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ p_2) \tag{4}$$

$$g\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ p_3) \tag{5}$$

$$g\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p_i),\qquad i=4,5,\dots r \tag{6}$$

$$g\not\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ p_i),\qquad i=4,5,\dots r \tag{7}$$

$$g\not\equiv 10\ (\mathrm{mod}\ p_i),\qquad i=4,5,\dots r \tag{8}$$

$$g\not\equiv 12\ (\mathrm{mod}\ p_i),\qquad i=4,5,\dots,r \tag{9}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（3）~（9）式条件的所有元素分选出来,组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

15.1.1 求证筛函数的下界

被筛集合 N 为自然数列集合，模数集合 P 中元素为互不相同的素数，根据第一章的相关公式（61）式可知，基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = |N|\prod_{i=1}^{r}(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{10}$$

根据第一章的（72）式可知，基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > |N|\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{|N|})(\frac{\alpha_i}{p_i}) \tag{11}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数，下面具体分析确定 α_i 的数值。

当 $i \leqslant 3$ 时，由筛选条件（3），（4），（5）式可知集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的一个同余类子集符合筛选条件。故得

$$\alpha_i = 1\,, \qquad i = 1,2,3 \tag{12}$$

当 $i \geqslant 4$，　　$p_i \geqslant p_4 = 7$

数组 0，6，10，12 中的各元素每两两之间对模 p_i（$i \geqslant 4$）皆不同余。故（6），（7），（8），（9）式对应于四个不同的同余类子集，此时，集合 N 中按模 p_i 只有模 p_i 的 $(p_i - 4)$ 个同余类子集符合筛选条件，故得：

$$\alpha_i = p_i - 4\,, \qquad i = 4,5,\ldots,r \tag{13}$$

将（12）和（13）式代入（10）式，可得

$$|N_B|=|N|\prod_{i=1}^{3}(\frac{1}{p_i})\prod_{j=4}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{14}$$

将（12）和（13）式代入（11）式，可得

$$|N_B|>F_1|N|\prod_{i=1}^{3}(\frac{1}{p_i})\prod_{j=4}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{15}$$

$$F_1=\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{|N|})>1-\frac{1}{|N|}\sum_{i=1}^{r}p_i \tag{16}$$

由第一章（77）式推得

$$\Pi(x)-\Pi(\frac{x}{2})<\Pi(\frac{x}{2}) \tag{17}$$

（17）式表明数值越大的区域素数分布的密度越小，由此可得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i=\sum_{i=1}^{4}p_i+\sum_{i=5}^{r}p_i<$$

$$17+(\frac{1}{2})(p_5+p_r)\{\Pi(p_r)-4\} \tag{18}$$

根据切比晓夫不等式可知

$$\Pi(p_r)<(6\ln 2)\frac{p_r}{\ln p_r} \tag{19}$$

将（19）代入（18）式可得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i<17-2(p_5+p_r)+\frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{\ln p_r} \tag{20}$$

将（20）代入（16）式，可得

$$F_1>1+\frac{2(p_5+p_r)}{|N|}-\{\frac{17}{|N|}+\frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{|N|\ln p_r}\} \tag{21}$$

将（21）代入（15）式，可得：

$$|N_B|>\{\frac{|N|}{30}+F_2\}\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{22}$$

$$F_2 = \frac{2(p_5 + p_r)}{30} - \{\frac{17}{30} + \frac{2.08(p_5 + p_r)p_r}{30\ln p_r}\} \tag{23}$$

将$|N|$作以下变换：

$$|N| = |N|\{p_{11}/(p_{13}-4)\} + 6|N|/(p_{13}-4) \tag{24}$$

$$|N| = |N|\{p_{12}/(p_{14}-4)\} + 2|N|/(p_{14}-4) \tag{25}$$

$$|N| = |N|\{p_{13}/(p_{15}-4)\} + 2|N|/(p_{15}-4) \tag{26}$$

$$|N| = |N|\{p_{14}/(p_{16}-4)\} + 6|N|/(p_{16}-4) \tag{27}$$

$$|N| = |N|\{p_{15}/(p_{17}-4)\} + 8|N|/(p_{17}-4) \tag{28}$$

$$|N| = |N|\{p_{16}/(p_{18}-4)\} + 4|N|/(p_{18}-4) \tag{29}$$

$$|N| = |N|\{p_{17}/(p_{19}-4)\} + 4|N|/(p_{19}-4) \tag{30}$$

$$|N| = |N|\{p_{18}/(p_{20}-4)\} + 6|N|/(p_{20}-4) \tag{31}$$

$$|N| = |N|\{p_{19}/(p_{21}-4)\} + 2|N|/(p_{21}-4) \tag{32}$$

$$|N| = |N|\{p_{20}/(p_{22}-4)\} + 4|N|/(p_{22}-4) \tag{33}$$

$$|N| = |N|\{p_{21}/(p_{23}-4)\} + 6|N|/(p_{23}-4) \tag{34}$$

$$|N| = |N|\{p_{22}/(p_{24}-4)\} + 6|N|/(p_{24}-4) \tag{35}$$

$$|N| = |N|\{p_{23}/(p_{25}-4)\} + 10|N|/(p_{25}-4) \tag{36}$$

$$|N| = |N|\{p_{24}/(p_{26}-4)\} + 8|N|/(p_{26}-4) \tag{37}$$

$$|N| = |N|\{p_{25}/(p_{27}-4)\} + 2|N|/(p_{27}-4) \tag{38}$$

$$|N| = |N|\{p_{26}/(p_{28}-4)\} + 2|N|/(p_{28}-4) \tag{39}$$

将（24）~（39）式逐次代入右端第一项，得

$$|N| = |N|\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i - 4}) + F_3 \tag{40}$$

$$F_3=(\frac{6|N|}{p_{13}-4})\prod_{i=14}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{2|N|}{p_{14}-4})\prod_{i=15}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+$$

$$(\frac{2|N|}{p_{15}-4})\prod_{i=16}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{6|N|}{p_{16}-4})\prod_{i=17}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+$$

$$(\frac{8|N|}{p_{17}-4})\prod_{i=18}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{4|N|}{p_{18}-4})\prod_{i=19}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+$$

$$(\frac{4|N|}{p_{19}-4})\prod_{i=20}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{6|N|}{p_{20}-4})\prod_{i=21}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+$$

$$(\frac{2|N|}{p_{21}-4})\prod_{i=22}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{4|N|}{p_{22}-4})\prod_{i=23}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+$$

$$(\frac{6|N|}{p_{23}-4})\prod_{i=24}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{6|N|}{p_{24}-4})\prod_{i=25}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+$$

$$(\frac{10|N|}{p_{25}-4})\prod_{i=26}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+(\frac{8|N|}{p_{26}-4})\prod_{i=27}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+$$

$$(\frac{2|N|}{p_{27}-4})(\frac{p_{26}}{p_{28}-4})+\frac{2|N|}{p_{28}-4} \tag{41}$$

将 $P_{12}=37$，$P_{13}=41$，$P_{14}=43$，$P_{15}=47$，$P_{16}=53$，$P_{17}=59$，$P_{18}=61$，$P_{19}=67$，$P_{20}=71$，$P_{21}=73$，$P_{22}=79$，$P_{23}=83$，$P_{24}=89$，$P_{25}=97$，$P_{26}=101$，$P_{27}=103$

$P_{28}=107$ 代入（41）式，得

$$F_3=0.72|N| \tag{42}$$

将（42）代入（40）式，得

$$|N|=|N|\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})+0.72|N| \tag{43}$$

将（43）代入（22）式，得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{30}\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}) + F_4\}\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) \quad (44)$$

$$F_4 = \frac{0.72|N|}{30} + \frac{2(p_5+p_r)}{30} - \{\frac{17}{30} + \frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{30\ln p_r}\} \quad (45)$$

将（2）式代入（45）式，得

$$F_4 \geqslant \frac{0.72p_r^2 + 1.28p_r + 5}{30} - \frac{2.08(p_5+p_r)p_r}{30\ln p_r} > F_5 p_r \quad (46)$$

$$F_5 = \frac{0.72p_r + 1.28}{30} - \frac{2.08(p_5+p_r)}{30\ln p_r} \quad (47)$$

$$\frac{dF_5}{dp_r} = \frac{0.72}{30} - (\frac{2.08}{30})\{\frac{\ln p_r - (p_5+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\} =$$

$$\frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30\ln p_r} + \frac{2.08(p_5+p_r)}{30p_r\ln^2 p_r} >$$

$$\frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30\ln p_r} \quad (48)$$

令 $\frac{0.72}{30} - \frac{2.08}{30\ln p_r} > 0$

得： $p_r > 17.98$ （49）

将条件（49）式代入（48）式，可得

$$\frac{dF_5}{dp_r} > 0, \qquad p_r > 17.98 \quad (50)$$

（50）式表示，当 $p_r > 17.98$ 时，F_5 为 p_r 的递增函数。

当 $A \geqslant 12000$ 时，$p_r \geqslant 109 > 17.98$

且 $F_5\,(p_r = 109) = 0.885$ 故得

$$F_5 > 0.88, \qquad A \geqslant 12000 \quad (51)$$

将（51）式代入（46）式，得

$$F_4 > 0.88p_r \tag{52}$$

将（52）式代入（44）式，可得

$$|N_B| > \{\frac{|N|}{30}\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4}) + 0.88p_r\}\prod_{i=4}^{r}(\frac{p_i-4}{p_i}) >$$

$$\frac{|N|}{30}\prod_{i=13}^{28}(\frac{p_{i-2}}{p_i-4})\prod_{j=4}^{r}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{53}$$

已知：$p_j - 4 \geqslant p_{j-2}$　（$j > 28$）　（54）

由（53）和（54）式可得

$$|N_B| > \frac{|N|}{30}\prod_{j=4}^{12}(\frac{p_j-4}{p_j})\prod_{i=13}^{r}(\frac{p_{i-2}}{p_i}) =$$

$$(\frac{|N|}{30})(\frac{p_{11}p_{12}}{p_rp_{r-1}})\prod_{j=4}^{12}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{55}$$

将（2）式代入（55）式，可得

$$|N_B| > (\frac{p_r^{\ 2} - p_r}{30})(\frac{p_{11}p_{12}}{p_rp_{r-1}})\prod_{j=4}^{12}(\frac{p_j-4}{p_j}) \tag{56}$$

已知，$p_r \geq p_{r-1} + 2$　故得

$$|N_B| > \{\frac{(p_{11}-4)(p_{12}-4)}{30}\}\prod_{i=4}^{10}(\frac{p_i-4}{p_i}) \tag{57}$$

将 $P_4 = 7$，$P_5 = 11$，$P_6 = 13$，$P_7 = 17$，$P_8 = 19$，$P_9 = 23$，$P_{10} = 29$，$P_{11} = 31$，$P_{12} = 37$ 代入（57）式可得

$$|N_B| > 2.4 \tag{58}$$

15.1.2　通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一元素 x_0 再引入参量

$$x_k = x_0 - k, \quad k = 1,2,\ldots,12 \tag{59}$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组

$$x_k \equiv x_{ki} (\mathrm{mod}\, p_i), \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{60}$$

$$k = 1,2,\ldots 12$$

$$x_0 \equiv x_{0i} (\mathrm{mod}\, p_i), \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{61}$$

$$k \equiv k_i (\mathrm{mod}\, p_i), \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{62}$$

根据定义式可知

$$x_0 \in E \quad x_0 > 1 \tag{63}$$

$$x_k \in E, \quad x_k > 1 \tag{64}$$

$$k = 1,2,\ldots,12$$

由于 $x_0 \in N_B$，根据筛选条件（3）～（9）式可知

$$x_{01} = 1 \tag{65}$$

$$x_{02} = 2 \tag{66}$$

$$x_{03} = 4 \tag{67}$$

$$x_{0i} \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{68}$$

$$x_{0i} \not\equiv 6 \ (\mathrm{mod}\, p_i), \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{69}$$

$$x_{0i} \not\equiv 10 \ (\mathrm{mod}\, p_i), \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{70}$$

$$x_{0i} \not\equiv 12 \ (\mathrm{mod}\, p_i), \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{71}$$

根据同余式的性质，由（59）式推得

$$x_{ki} \equiv x_{0i} - k_i \ (\mathrm{mod}\, p_i) \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{72}$$

$$k = 1,2,\ldots,12$$

当 $i = 1$ 时，由（72）式得

$$x_{k1} \equiv x_{01} - k_1 \ (\mathrm{mod}\, p_1) \tag{73}$$

$$k_1 = 1, \quad k = 1,3,5,7,9,11 \tag{74}$$

由（65），（73）和（74）式可知

$$x_{k1}=0 \qquad k=1,3,5,7,9,11 \tag{75}$$

（75）式表明，x_k（$k=1,3,5,7,9,11$）为复合数。

当$i=2$时，由（72）式得

$$x_{k2}\equiv x_{02}-k_2 \pmod{p_2} \tag{76}$$

$$k_2=2, \qquad k=2,8 \tag{77}$$

由（66），（76）和（77）式可知

$$x_{k2}=0 \qquad k=2,8 \tag{78}$$

（78）式表明，x_k（$k=2,8$）为复合数。

当$i=3$时，由（72）式得

$$x_{k3}\equiv x_{03}-k_3 \pmod{p_3} \tag{79}$$

$$k_3=4, \qquad k=4 \tag{80}$$

由（67），（79）和（80）式可知：

$$x_{k3}=0 \qquad k=4 \tag{81}$$

（81）式表明，x_k（$k=4$）为复合数。

综上（75），（78）和（81）式可知

x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_7，x_8，x_9，和x_{11}都是复合数。

由（59）式还可以推得

$$x_{6i}\equiv x_{0i}-6 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\dots,r \tag{82}$$

$$x_{10i}\equiv x_{0i}-10 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\dots,r \tag{83}$$

$$x_{12i}\equiv x_{0i}-12 \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\dots,r \tag{84}$$

由（69）和（82）式可知

$$x_{6i}\neq 0, \qquad i=1,2,\dots,r \tag{85}$$

由（70）和（83）式可知

$$x_{10i}\neq 0, \qquad i=1,2,\dots,r \tag{86}$$

由（71）和（84）式可知

$$x_{12i} \neq 0, \qquad i = 1,2,\dots,r \tag{87}$$

根据第一章引理 3，由（63）和（68）式可知：x_0 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（64）和（85）式可知：x_6 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（64）和（86）式可知：x_{10} 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（64）和（87）式可知：x_{12} 为奇素数。

由（59）式可得

$$x_0 - x_6 = 6 \tag{88}$$

$$x_6 - x_{10} = 4 \tag{89}$$

$$x_{10} - x_{12} = 2 \tag{90}$$

由（87）式可知，素数 x_{12} 大于 p_r，根据定义，p_r 是不超过 $A^{1/2}$ 的最大素数，故素数 x_{12} 大于 $A^{1/2}$。素数 x_0，x_6，x_{10} 都大于 x_{12}，所以这四个素数都大于 $A^{1/2}$。

总结上述结果可知：

一、x_0，x_6，x_{10}，x_{12} 为四个相邻的素数。

二、该四个相邻素数之间的三个间隙随着素数数值的增大而增大。

三、该四个相邻素数构成区间（$A^{1/2}$，A）内的一个“素数连续三间隙递增组合”。

已知，x_0 为集合 N_B 中任一元素，所以集合 N_B 中每个元素都对应一个“素数连续三间隙递增组合”。根据（58）式可得如下定律：

素数连续三间隙递增组合定律：

对大于 12000 的任意正整数 A 而言，在区间（$A^{1/2}$，A）内至少有两个“素数连续三间隙递增组合”。

15.2　素数三间隙递增组合的无限性

根据前节所得定律可知，在区间（$A^{1/2}$，A）（A>12000）内至少有两个“素数连续三间隙递增组合”，同理在区间（A,A^2）内同样有两个或两个以上的“素数连续三间隙递增组合”，在区间（A^2,A^4）内还有至少两个“素数连续三间隙递增组合”……依次类推，当 A 的指数趋于无穷时，必定“素数连续三间隙递增组合”有无穷多个。

15.3　求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>递增的素数间隙</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno(){
var a=form1.a.value;
if(a==""||a==null){
    alert("请输入一个数字（100 以上）！ ");
    return;
}else if(parseInt(a)<100){
    alert("输入的数字必须大于 100！ ");
    return;
}form1.submit();
```

```
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
递增的素数间隙求解程序</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
  <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
      <tr>
        <td width="202" align="right">请输入一个数字（100
以上）：</td>
        <td width="278"><input name="a" type="text" id="a"></td>
      </tr>
<tr>
        <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
             
          <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
      </tr>
  </table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
```

```
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng(request.form("a"))
%>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>递增的素数间隙</title>
</head>
<body
bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000"
size="4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点
击“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none"><font
color="#FF0000" size="5"><strong>递增的素数间隙组合求解运
算结果</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array();
var array_pi = new Array();
//var array_pi2 = new Array();
var array_a = new Array();
//var array_ai = new Array();
//var array_hi = new Array();
```

```
//var array_pi_ni = new Array()
//a=clng(request.form("a"))
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt("<%=a%>");
if (a<100)
{
    document.write("输入错误！");
}else{
document.write("<font color=#FF0000 size='4'>输入的数 a 为:
</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"</font><br>");
//n=parseInt(a/2);
//alert(n);
pr=Math.sqrt(a);
pr=parseInt(pr);
//i=0
var i1=1;
//var i2=1;
ther=0;
i=0
//alert(pr);
for(pi=2;pi<=pr;pi++)
{//alert(array_pi[i]);
 flag=1;
 for(j=2;j<=(pi/2);j++)
 {
       if(pi%j==0)
       {
             flag=0;
             break;
```

```
        }
    }
    if(flag==1)
    {
        //ni=n%pi;
        //array_ni[i]=ni;
        array_pi[i]=pi;
        //array_pi2[i]=pi;
        //array_ai[i]=a%pi;
        //array_pi_ni[i]=pi-ni
        //if(i<6)
        //alert(array_pi[i]);
        //document.write(array_pi[i]+" ");
        i++;
    }
}
//document.write("<br>");
//alert(array_pi[i-1]);
ther=i;
//alert(a-array_pi[ther-1]);

for(i=(array_pi[ther-1]+1),j=0;i<=a;i++,j++){
 array_a[j]=i;
 //if(i<450)
 //alert(array_a[i]);
 //document.write(array_a[i]+" ");
 //alert(array_n[i]);
}//alert(array_a.length);
//document.write("<br>");
theflag=0;
for(i=0;i<array_a.length;i++)
```

```
    {
     theflag=0;
     if((array_a[i]%array_pi[0]==1)&&(array_a[i]%array_pi[1]==2
)&&(array_a[i]%array_pi[2]==4)){
          //alert(array_pi[0]+"    "+array_pi[1]+"    "+array_pi[2]+"
"+array_pi[3]);
          //alert(array_a[i]);
          theflag=1;
     }
     if(theflag==1){
          for(k=3;k<array_pi.length;k++){

     if((array_a[i]%array_pi[k]==0)||(array_a[i]%array_pi[k]==6)||(
(array_a[i]%array_pi[k])==(10%array_pi[k]))||((array_a[i]%array_p
i[k])==(12%array_pi[k]))){
                    array_a[i]=0;
                    break;
               }
          }
     }else{
          array_a[i]=0;
     }
    }
    x=0;
    for(i=0;i<array_a.length;i++){
     if(array_a[i]>0){
          //document.write(array_a[i]+" ");
          x++;
     }
     //alert(array_n[i]);
    }
```

```
document.write("<br><font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的解的组数为：</font>" + x + "<br>");
if(x>0){
document.write("<font color=#0000FF size=3>从集合 N 中求
得的解为：</font><br>");
var astr=new String(a);
var thelength=astr.length;
var x11,x22,x33,x44;
m=1;
for(i=0;i<array_a.length;i++)
{
    switch(array_a[i])
    {
        case 0: break;
        default:
              x1=array_a[i];
              x2=array_a[i]-6;
              x3=array_a[i]-10;
              x4=array_a[i]-12;
              x11=new String(x1);
              for(var iii=x11.length;iii<thelength;iii++){
                   x11="0"+""+x11;
              }
              x22=new String(x2);
              for(var iii=x22.length;iii<thelength;iii++){
                   x22="0"+""+x22;
              }
              x33=new String(x3);
              for(var iii=x33.length;iii<thelength;iii++){
                   x33="0"+""+x33;
              }
```

```
                    x44=new String(x4);
                    for(var iii=x44.length;iii<thelength;iii++){
                          x44="0"+""+x44;
                    }
                    document.write("<font size='4' class='parametercss'
>x</font>0="+x11+"  <font size='4' class='parametercss'
>x</font>6="+x22+"  <font size='4' class='parametercss'
>x</font>10="+x33+"  <font size='4' class='parametercss'
>x</font>12="+x44);
                    if(m%1==0)
                    {
                      document.write("<br>");

                    }
                     m=m+1;
          }

      }
     }


     document.all("wait_div").style.display="none";
     document.all("wait2_div").style.display="";
     }
     </script>
     </p></body>
     </html>
```

15.4 实筛数据

输入的数 a 为：10000

从集合 N 中求得的解的组数为：12

从集合 N 中求得的解为：

x0=00239 x6=00233 x10=00229 x12=00227
x0=00359 x6=00353 x10=00349 x12=00347
x0=01289 x6=01283 x10=01279 x12=01277
x0=01439 x6=01433 x10=01429 x12=01427
x0=01499 x6=01493 x10=01489 x12=01487
x0=01619 x6=01613 x10=01609 x12=01607
x0=02699 x6=02693 x10=02689 x12=02687
x0=03539 x6=03533 x10=03529 x12=03527
x0=03929 x6=03923 x10=03919 x12=03917
x0=04139 x6=04133 x10=04129 x12=04127
x0=04649 x6=04643 x10=04639 x12=04637
x0=04799 x6=04793 x10=04789 x12=04787

输入的数 a 为：100000

从集合 N 中求得的解的组数为：37

从集合 N 中求得的解为：

x0=000359 x6=000353 x10=000349 x12=000347
x0=001289 x6=001283 x10=001279 x12=001277
x0=001439 x6=001433 x10=001429 x12=001427
x0=001499 x6=001493 x10=001489 x12=001487
x0=001619 x6=001613 x10=001609 x12=001607
x0=002699 x6=002693 x10=002689 x12=002687
x0=003539 x6=003533 x10=003529 x12=003527
x0=003929 x6=003923 x10=003919 x12=003917
x0=004139 x6=004133 x10=004129 x12=004127
x0=004649 x6=004643 x10=004639 x12=004637
x0=004799 x6=004793 x10=004789 x12=004787
x0=011789 x6=011783 x10=011779 x12=011777
x0=012119 x6=012113 x10=012109 x12=012107
x0=014639 x6=014633 x10=014629 x12=014627

$x0$=020759 $x6$=020753 $x10$=020749 $x12$=020747
$x0$=021569 $x6$=021563 $x10$=021559 $x12$=021557
$x0$=025589 $x6$=025583 $x10$=025579 $x12$=025577
$x0$=027749 $x6$=027743 $x10$=027739 $x12$=027737
$x0$=028289 $x6$=028283 $x10$=028279 $x12$=028277
$x0$=031259 $x6$=031253 $x10$=031249 $x12$=031247
$x0$=032069 $x6$=032063 $x10$=032059 $x12$=032057
$x0$=032309 $x6$=032303 $x10$=032299 $x12$=032297
$x0$=033359 $x6$=033353 $x10$=033349 $x12$=033347
$x0$=033629 $x6$=033623 $x10$=033619 $x12$=033617
$x0$=036479 $x6$=036473 $x10$=036469 $x12$=036467
$x0$=038459 $x6$=038453 $x10$=038449 $x12$=038447
$x0$=039239 $x6$=039233 $x10$=039229 $x12$=039227
$x0$=041189 $x6$=041183 $x10$=041179 $x12$=041177
$x0$=044279 $x6$=044273 $x10$=044269 $x12$=044267
$x0$=055829 $x6$=055823 $x10$=055819 $x12$=055817
$x0$=068219 $x6$=068213 $x10$=068209 $x12$=068207
$x0$=068909 $x6$=068903 $x10$=068899 $x12$=068897
$x0$=071339 $x6$=071333 $x10$=071329 $x12$=071327
$x0$=077249 $x6$=077243 $x10$=077239 $x12$=077237
$x0$=080789 $x6$=080783 $x10$=080779 $x12$=080777
$x0$=097379 $x6$=097373 $x10$=097369 $x12$=097367
$x0$=099719 $x6$=099713 $x10$=099709 $x12$=099707

输入的数 a 为：200000
从集合 N 中求得的解的组数为：51
从集合 N 中求得的解为：
$x0$=001289 $x6$=001283 $x10$=001279 $x12$=001277
$x0$=001439 $x6$=001433 $x10$=001429 $x12$=001427
$x0$=001499 $x6$=001493 $x10$=001489 $x12$=001487
$x0$=001619 $x6$=001613 $x10$=001609 $x12$=001607

$x0$=002699 $x6$=002693 $x10$=002689 $x12$=002687
$x0$=003539 $x6$=003533 $x10$=003529 $x12$=003527
$x0$=003929 $x6$=003923 $x10$=003919 $x12$=003917
$x0$=004139 $x6$=004133 $x10$=004129 $x12$=004127
$x0$=004649 $x6$=004643 $x10$=004639 $x12$=004637
$x0$=004799 $x6$=004793 $x10$=004789 $x12$=004787
$x0$=011789 $x6$=011783 $x10$=011779 $x12$=011777
$x0$=012119 $x6$=012113 $x10$=012109 $x12$=012107
$x0$=014639 $x6$=014633 $x10$=014629 $x12$=014627
$x0$=020759 $x6$=020753 $x10$=020749 $x12$=020747
$x0$=021569 $x6$=021563 $x10$=021559 $x12$=021557
$x0$=025589 $x6$=025583 $x10$=025579 $x12$=025577
$x0$=027749 $x6$=027743 $x10$=027739 $x12$=027737
$x0$=028289 $x6$=028283 $x10$=028279 $x12$=028277
$x0$=031259 $x6$=031253 $x10$=031249 $x12$=031247
$x0$=032069 $x6$=032063 $x10$=032059 $x12$=032057
$x0$=032309 $x6$=032303 $x10$=032299 $x12$=032297
$x0$=033359 $x6$=033353 $x10$=033349 $x12$=033347
$x0$=033629 $x6$=033623 $x10$=033619 $x12$=033617
$x0$=036479 $x6$=036473 $x10$=036469 $x12$=036467
$x0$=038459 $x6$=038453 $x10$=038449 $x12$=038447
$x0$=039239 $x6$=039233 $x10$=039229 $x12$=039227
$x0$=041189 $x6$=041183 $x10$=041179 $x12$=041177
$x0$=044279 $x6$=044273 $x10$=044269 $x12$=044267
$x0$=055829 $x6$=055823 $x10$=055819 $x12$=055817
$x0$=068219 $x6$=068213 $x10$=068209 $x12$=068207
$x0$=068909 $x6$=068903 $x10$=068899 $x12$=068897
$x0$=071339 $x6$=071333 $x10$=071329 $x12$=071327
$x0$=077249 $x6$=077243 $x10$=077239 $x12$=077237
$x0$=080789 $x6$=080783 $x10$=080779 $x12$=080777
$x0$=097379 $x6$=097373 $x10$=097369 $x12$=097367

$x0$=099719 $x6$=099713 $x10$=099709 $x12$=099707
$x0$=113159 $x6$=113153 $x10$=113149 $x12$=113147
$x0$=118259 $x6$=118253 $x10$=118249 $x12$=118247
$x0$=122039 $x6$=122033 $x10$=122029 $x12$=122027
$x0$=122399 $x6$=122393 $x10$=122389 $x12$=122387
$x0$=124349 $x6$=124343 $x10$=124339 $x12$=124337
$x0$=128669 $x6$=128663 $x10$=128659 $x12$=128657
$x0$=129539 $x6$=129533 $x10$=129529 $x12$=129527
$x0$=152429 $x6$=152423 $x10$=152419 $x12$=152417
$x0$=165719 $x6$=165713 $x10$=165709 $x12$=165707
$x0$=179909 $x6$=179903 $x10$=179899 $x12$=179897
$x0$=183509 $x6$=183503 $x10$=183499 $x12$=183497
$x0$=187139 $x6$=187133 $x10$=187129 $x12$=187127
$x0$=191459 $x6$=191453 $x10$=191449 $x12$=191447
$x0$=197969 $x6$=197963 $x10$=197959 $x12$=197957
$x0$=198839 $x6$=198833 $x10$=198829 $x12$=198827

第十六章　哥德巴赫猜想第二证法

关于偶数的哥德巴赫猜想这一命题，还有区别于第二章的一种求证方法，表述如下。

16.1 求解证明

设 A 为大于 12×10^4 的任意大偶数，将不超过 A 的全部正整数集合用 E 表示，则集合 E 的基数 $|E|$ 等于 A，即

$$|E| = A \qquad (1)$$

以埃氏筛法求得不超过 $A^{1/2}$ 的全部素数集合 P，并将集合 P 中元素按数值大小顺序排列如下：

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_r \le A^{1/2} \qquad (2)$$

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组：

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \qquad (3)$$

A_i 为非负的最小剩余。

A 为偶数，必可用下式表述：

$$A = 2n \quad n \text{ 为正整数} \qquad (4)$$

将不超过 n 的全部正整数集合用 N 表示，则集合 N 的基数 $|N|$ 等于 n

$$|N| = n \qquad (5)$$

用筛选方法从集合 N 中分选出必要的子集。

给定筛选条件：

$$g \ne 0 \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,r \qquad (6)$$

$$g \neq A_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{7}$$

g 表示集合 N 中被选元素。

从集合 N 中将同时符合（6），（7）式的所有元素分选出来，组成子集 N_B，再来讨论子集 N_B 的基数 $|N_B|$（筛函数）。

16.1.1　求证筛函数的下界

集合 N 为自然数列，模数集合 P 中的元素为互不相同的 r 个素数，根据第一章（61）式可知基数 $|N_B|$ 的近似估算公式为

$$|N_B| = n\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_i}{P_i}\right) \tag{8}$$

根据第一章（72）式可知基数 $|N_B|$ 的下界计算公式为

$$|N_B| > n\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{n-p_i}{n}\right)\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \tag{9}$$

式中 α_i 为按照筛选条件所选取的模 p_i 的同余类子集的个数，下面具体分析确定 α_i 的数值。

（一）当 i=1 时，筛选条件（6）（7）式即为

$$g \neq 0 \pmod{p_1} \tag{10}$$

$$g \neq A_1 \pmod{p_1} \tag{11}$$

$p_1 = 2$，A 为偶数，故知 $A_1 = 0$，可见（11）式与（10）式实为同一条件，只需考虑其中之一即可。按照（10）式知，集合 N 中模 p_1 的“0 同余类子集”不符合被选条件，应当筛掉，模 p_1 的“1 同余类子集”符合被选条件，应被选取，即得

$$\alpha_1 = 1 \tag{12}$$

（二）当 i>1 时，分两种情况：

（i）$i > 1$ 且 $A_i = 0$

将 $A_i=0$ 这一条件代入（7）式后，（7）式同于（6）式，即二者合为（6）式一个筛选条件。由此知集合 N 中只有模 p_i 的"0 同余类子集"不符合被选条件，其余（ p_i-1）个模 p_i 的同余类子集都符合被选条件，故得

$$\alpha_i = p_i - 1 \qquad (i>1; A_i = 0) \tag{13}$$

（ii）　$i>1$　且 $A_i \neq 0$

此时，（6）式和（7）式为两个不同的筛选条件，由此决定了集合 N 中模 p_i 的"0 同余类子集"和" A_i 同余类子集"都不符合被选条件，其余（ p_i-2）个模 p_i 的同余类子集都能符合被选条件，故得

$$\alpha_i = p_i - 2 \qquad (i>1; A_i \neq 0) \tag{14}$$

将（13）（14）式合并，得

$$\alpha_i = p_i - 2^{\delta i} \qquad (i>1) \tag{15}$$

$$\delta i = 0 \quad (A_i = 0)\text{；}\quad \delta i = 1 \ (A_i \neq 0)$$

将（12），（15）代入（8）式得近似估算公式

$$|N_B| = (\frac{n}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i - 2^{\delta i}}{p_i}) \tag{16}$$

$$\delta i = 0 \quad (A_i = 0)\text{；}\quad \delta i = 1 \ (A_i \neq 0)$$

将（12），（15）代入（9）式得下界计算公式

$$|N_B| > F_1(\frac{n}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i - 2^{\delta i}}{p_i}) \tag{17}$$

$$\delta i = 0 \quad (A_i = 0)\text{；}\quad \delta i = 1 \ (A_i \neq 0)$$

其中 $F_1 = \prod_{i=1}^{r}(1-\frac{p_i}{n})$　（18）

由于 $p_i < n$ （ $i = 1,2,\ldots,r$ ）显见 $F_1 > 0$，故根据第一章（64）

式可将（17）式改写为

$$|N_B| > F_1(\frac{n}{2})\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{19}$$

由（18）式得 $F_1 > 1-(\frac{1}{n})\sum_{i=1}^{r}p_i$ （20）

由第一章（77）式可推得

$$\Pi(x)-\Pi(\frac{x}{2}) < \Pi(\frac{x}{2}) \tag{21}$$

（21）式表明，数值越大的区域素数分布的密度越小。由此可见

$$\sum_{i=1}^{r}p_i < (1/2)(p_1+p_r)\Pi(p_r) \tag{22}$$

由第一章（81），（82）式可知

$$\Pi(p_r) < H(\frac{p_r}{\ln p_r}) \tag{23}$$

（按（81）式 H=2；按（82）式 H=6ln2）

即 H 可以选 2，或 6ln2。

将（23）代入（22）式得

$$\sum_{i=1}^{r}p_i < (p_1+p_r)\frac{Hp_r}{2\ln p_r} \tag{24}$$

（24）代入（20）式得

$$F_1 > 1-\frac{(p_1+p_r)Hp_r}{2n\ln p_r} \tag{25}$$

（25）代入（19）得

$$|N_B| > \{\frac{n}{2}-\frac{(p_1+p_r)Hp_r}{4\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{26}$$

将（$n/2$）作以下变换：

$$n/2=(n/2)\{p_4/(p_5-2)\}+n/(p_5-2) \tag{27}$$

$$n/2=(n/2)\{p_5/(p_6-2)\} \tag{28}$$

$$n/2=(n/2)\{p_6/(p_7-2)\}+n/(p_7-2) \tag{29}$$

$$n/2=(n/2)\{p_7/(p_8-2)\} \tag{30}$$

$$n/2=(n/2)\{p_8/(p_9-2)\}+n/(p_9-2) \tag{31}$$

$$n/2=(n/2)\{p_9/(p_{10}-2)\}+2n/(p_{10}-2) \tag{32}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{10}/(p_{11}-2)\} \tag{33}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{11}/(p_{12}-2)\}+2n/(p_{12}-2) \tag{34}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{12}/(p_{13}-2)\}+n/(p_{13}-2) \tag{35}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{13}/(p_{14}-2)\} \tag{36}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{14}/(p_{15}-2)\}+n/(p_{15}-2) \tag{37}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{15}/(p_{16}-2)\}+2n/(p_{16}-2) \tag{38}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{16}/(p_{17}-2)\}+2n/(p_{17}-2) \tag{39}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{17}/(p_{18}-2)\} \tag{40}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{18}/(p_{19}-2)\}+2n/(p_{19}-2) \tag{41}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{19}/(p_{20}-2)\}+n/(p_{20}-2) \tag{42}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{20}/(p_{21}-2)\} \tag{43}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{21}/(p_{22}-2)\}+2n/(p_{22}-2) \tag{44}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{22}/(p_{23}-2)\}+n/(p_{23}-2) \tag{45}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{23}/(p_{24}-2)\}+2n/(p_{24}-2) \tag{46}$$

$$n/2=(n/2)\{p_{24}/(p_{25}-2)\}+3n/(p_{25}-2) \tag{47}$$

将（27）～（47）式逐次代入，可得

$$n/2=\frac{n}{2}\prod_{i=5}^{25}\left(\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\right)+F_2 \tag{48}$$

$$F_2=(\frac{n}{p_5-2})\prod_{i=6}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{n}{p_7-2})\prod_{i=8}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_9-2})\prod_{i=10}^{25}\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\}+(\frac{2n}{p_{10}-2})\prod_{i=11}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2n}{p_{12}-2})\prod_{i=13}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{n}{p_{13}-2})\prod_{i=14}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_{15}-2})\prod_{i=16}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2n}{p_{16}-2})\prod_{i=17}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2n}{p_{17}-2})\prod_{i=18}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2n}{p_{19}-2})\prod_{i=20}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_{20}-2})\prod_{i=21}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+(\frac{2n}{p_{22}-2})\prod_{i=23}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{n}{p_{23}-2})\prod_{i=24}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})+$$

$$(\frac{2n}{p_{24}-2})(\frac{p_{24}}{p_{25}-2})+(\frac{3n}{p_{25}-2}) \tag{49}$$

将 $p_5=11$， $p_6=13$， $p_7=17$， $p_8=19$， $p_9=23$， $p_{10}=29$， $p_{11}=31$， $p_{12}=37$， $p_{13}=41$， $p_{14}=43$， $p_{15}=47$， $p_{16}=53$， $p_{17}=59$， $p_{18}=61$， $p_{19}=67$， $p_{20}=71$， $p_{21}=73$， $p_{22}=79$， $p_{23}=83$， $p_{24}=89$， $p_{25}=97$ 代入（49）式求得

$$F_2=0.3654n \tag{50}$$

将（50）式代入（48）得

$$n/2=\frac{n}{2}\prod_{i=5}^{25}\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\}+0.3654n \tag{51}$$

将（51）代入（26）式得

$$|N_B| > \frac{n}{2}\prod_{i=5}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})\prod_{j=2}^{r}(\frac{p_j-2}{p_j})+$$

$$\{0.3654n-\frac{(p_1+p_r)Hp_r}{4\ln p_r}\}\prod_{i=2}^{r}(\frac{p_i-2}{p_i}) \tag{52}$$

由（2）和（4）式知：　$n = A/2 \geqslant \frac{1}{2}p_r{}^2$　（53）

将（53）代入（52）式，

$$|N_B| > \frac{n}{2}\prod_{i=5}^{25}\{\frac{p_{i-1}}{p_i-2}\}\prod_{j=2}^{r}\{\frac{p_j-2}{p_j}\}+F_3 \tag{54}$$

$$F_3 = \{0.1827p_r-\frac{(p_1+p_r)H}{4\ln pr}\}p_r\prod_{i=2}^{r}\{\frac{p_i-2}{p_i}\} \tag{55}$$

令　$F_4 = 0.1827p_r-\frac{(p_1+p_r)H}{4\ln p_r}$　（56）

$$F_3 = F_4 p_r\prod_{i=2}^{r}\{\frac{p_i-2}{p_i}\} \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}p_r} = 0.1827-(\frac{H}{4})\{\frac{\ln p_r-(p_1+p_r)(1/p_r)}{\ln^2 p_r}\} =$$

$$0.1827-\frac{H}{4\ln p_r}+\frac{H(p_1+p_r)}{4p_r\ln^2 p_r} >$$

$$0.1827-\frac{H}{4\ln P_r} \tag{58}$$

令　$0.1827-\frac{H}{4\ln p_r} > 0$

得：$p_r > \mathrm{e}^{\{H/0.7308\}}$　（59）

将条件（59）式代入（58）式得

$$\frac{dF_4}{dp_r}>0 \qquad (p_r>e^{(H/0.7308)}) \tag{60}$$

（60）式表明当 $p_r>e^{(H/0.7308)}$ 时，F_4 为 p_r 的增值函数。

前已述及，H 取值可根据所论偶数的数值区间选择。为更具一般性，此处我们选择 H=6ln2。这样，（60）式可以改写为

$$\frac{dF_4}{dp_r}>0 \qquad (p_r>297) \tag{61}$$

当 A≥120000 时，p_r≥337>297

将 p_r=337，H=6ln2，代入（56）式算得

$$F_4=1.0088>1\text{，}(p_r=337) \tag{62}$$

由（61）（62）式可知

$$F_4>1 \qquad (p_r\geqslant 337) \tag{63}$$

或者，$F_4>1$ $\qquad$ (A≥120000) $\qquad$ （64）

将（64）式代入（57）式，得

$$F_3>p_r\prod_{i=2}^{r}\{\frac{p_i-2}{p_i}\} \tag{65}$$

由于 $p_i-2\geqslant P_{i-1}$ $(i\geqslant 3)$ $\qquad$ （66）

故 $$F_3>(\frac{p_r}{3})\prod_{i=3}^{r}\{\frac{p_{i-1}}{p_i}\}=1 \tag{67}$$

将（67）代入（54）式得

$$|N_B|>\frac{n}{2}\prod_{i=5}^{25}(\frac{p_{i-1}}{p_i-2})\prod_{j=2}^{r}(\frac{p_j-2}{p_j})+1 \tag{68}$$

由（66），（68）式可得

$$|N_B|>(\frac{n}{2})(\frac{1}{3})\prod_{i=3}^{r}(\frac{p_{i-1}}{p_i})+1=$$

$$(\frac{n}{2})(\frac{1}{P_r})+1 \tag{69}$$

将（53）式代入（69）式得

$$|N_B|>(p_r/4)+1 \tag{70}$$

考虑到集合 N_B 中有可能包含元素 1。所以，集合 N_B 中数值不为 1 的元素个数至少应为（$|N_B|$-1）个

$$|N_B|-1>p_r/4 \tag{71}$$

16.1.2　通过子集 N_B 求解

从集合 N_B 中任取一个数值不为 1 的元素 x，则

$$x\in E\,,\qquad x>1 \tag{72}$$

再引入参数 y

$$y=A-x \tag{73}$$

显然，$y\in E,\qquad y>1$　（74）

以集合 P 中各元素为模数求得同余式组：

$$x\equiv x_i\ (\operatorname{mod} p_i)\,,\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{75}$$

$$y\equiv y_i\ (\operatorname{mod} p_i)\,,\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{76}$$

$x\in N_B$，根据筛选条件（6）式可知

$$x_i\neq 0\,,\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{77}$$

根据筛选条件（7）式可知

$$x_i\neq A_i\,,\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{78}$$

依据同余式的性质，由（73）式推得

$$y_i\equiv A_i-x_i\ (\operatorname{mod} P_i)\,,\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{79}$$

由（78）和（79）式可知

$$y_i\neq 0\,,\qquad i=1,2,\ldots,r \tag{80}$$

根据第一章引理 3，由（72）和（77）式可知：x 为奇素数。

根据第一章引理 3，由（74）和（80）式可知：y 为奇素数。

将（73）式移项可得

$$A = x + y \tag{81}$$

（81）式即为关于偶数的哥德巴赫猜想的数学表达式。

x 为集合 N_B 中任取的一个不为 1 的元素即构成一对奇素数解。由（71）式知集合 N_B 中不为 1 的元素个数不少于 $p_r/4$ 个，故通过集合 N_B 至少可以求得 $p_r/4$ 对奇素数满足“哥德巴赫猜想”的命题要求。

对于偶数 120000 而言，$(p_r/4) = 84.25$，故知偶数 120000 对应（81）式的解的个数必不少于 85 个（85 对奇素数）。其它大于 120000 的任意偶数所对应的 $p_r/4$ 都不小于 84.25，所以对应（81）式的解的个数同样不少于 85 个（85 对奇素数）。

16.2 解的完备性问题

前述通过集合 N_B 求得（81）式的解，并非（81）式的全解，其全解还应补充以下部分。

16.2.1 补充解求证

延用前面的定义：

$$E = (1,2,\dots,A)$$

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$$

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_r \le A^{1/2}$$

$$A \equiv A_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\dots,r$$

用筛选方法从集合 P 中分选出必要的子集。

给定筛选条件，

$$g \not\equiv A_i \pmod{p_i}, \qquad i = 1,2,\dots,r \tag{82}$$

g 表示集合 P 中被选元素。

从集合 P 中，将符合（82）式条件的所有元素分选出来，组成子集 P_B。

A 为偶数，必然 $A_1=0$。

由筛选条件（82）式可知，p_1 肯定不属于集合 P_B，只要集合 P_B 不是空集，则其中的元素只能是奇素数。

假若　$P_B \neq \varnothing$

我们从集合 P_B 中任取一个奇素数 e，且令

$$z=A-e \tag{83}$$

则　$z\in E$，　　$z>1$　　（84）

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组：

$$e\equiv e_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$z\equiv z_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r$$

由于 $e\in P_B$，根据筛选条件（82）式可知

$$e_i\neq A_i, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{85}$$

依据同余式的性质，由（83）式推得

$$z_i\equiv A_i-e_i \pmod{p_i}, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{86}$$

由（85）和（86）式可知

$$z_i\neq 0, \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{87}$$

根据第一章引理 3，由（84）和（87）式可知：z 为奇素数。将（83）式移项可得。

$$A=z+e \tag{88}$$

由（88）可知，(z,e) 为满足（81）式的一个解。同理，集合 P_B 中的每个元素都对应（81）式的一个解。

16.2.2　全解构成

满足（81）式的全解应由以下两部分组成：

（1）通过集合 N_B 求得的解；

（2）通过集合 P_B 求得的解。

16.3 求解程序

下面是用 ASP 写的求解程序，包括输入界面和运算显示两个文件：

第一个文件（input.asp）：

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>哥德巴赫猜想</title>
<script language="JavaScript" >
function suborno（）{
    var a=form1.a.value;
    if（a==""||a==null）{
        alert（"请输入偶数（100 以上）！"）;
        return;
    }else if（parseInt（a）%2!=0||parseInt（a）<100）{
        alert（"输入的数必须是 100 以上的偶数！"）;
        return;
    }form1.submit（）;
}
</script>

</head>

<body bgcolor="#BFC0B6">
```

```
<p align="center"><font color="#FF0000" size="4"><strong>
哥德巴赫猜想求解程序（筛法 2）</strong></font></p>
<p align="center"> </p>
<p align="center"> </p>
<p align="center">如果您输入的偶数较大，计算时间将会较
长，请耐心等待！</p>
<form name="form1" method="post" action="sievejs.asp">
  <table width="500" border="0" align="center" cellpadding=
"5" cellspacing="0">
      <tr>
        <td width="161" align="right">请输入偶数(100 以上)：</td>
        <td width="319"><input name="a" type="text" id="a"></td>
      </tr>
      <tr>
        <td align="center" colspan="2"><input type="button"
name="Submit11" value="提交" onClick="javascript:suborno();">
             
          <input type="reset" name="Submit2" value="重置"></td>
      </tr>
    </table>
</form>
<p align="center"> </p>
</body>
</html>
```

第二个文件（sievejs.asp）：

```
<%a=clng（request.form（"a"））
%>
```

```
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=
gb2312">
<LINK href="./style.css" type=text/css rel=stylesheet>
<title>孪生素数</title>
</head>
<body bgcolor="#BFC0B6"><br> <br> <br> 
<div align="center" id="wait_div"><font color="#FF0000" size=
"4"><strong>如果出现提示“......是否取消该脚本？”，请点击
“否”，并请耐心等待！</strong></font></div>
<div align="center" id="wait2_div" style="display:none">
<font color="#FF0000" size="5"><strong>哥德巴赫猜想求解运算
结果（筛法 2）</strong></font></div>
<p><script language="JavaScript">
var a, i,pi,j,flag,ni,n,m,x,y,k,pr,ther,num1,num2,num3;
//var array_ni = new Array（）;
var array_pi = new Array（）;
//var array_pi2 = new Array（）;
var array_n = new Array（）;
var array_ai = new Array（）;
var array_hi = new Array（）;
//var array_pi_ni = new Array（）
//a=clng（request.form（"a"））
num1=0;
num2=0;
num3=0;
a=parseInt（"<%=a%>"）;
if （a<10 || a%2!=0）
```

```
    {
        document.write（"输入错误！"）;
    }else{
    document.write（"<font color=#FF0000 size='4'>输入的偶数 a 为:
</font><font color=#8000FF size=4>"+a+"    
<font color=#FF0000 size='4'>n = a/2="+parseInt(a/2)+"</font></font>
<br>"）;
    n=parseInt（a/2）;
    //alert（n）;
    pr=Math.sqrt（a）;
    pr=parseInt（pr）;
    //i=0
    var i1=1;
    //var i2=1;
    ther=0;
    i=0
    //alert（pr）;
    for（pi=2;pi<=pr;pi++）
    {//alert（array_pi[i]）;
        flag=1;
        for（j=2;j<=（pi/2）;j++）
        {
            if（pi%j==0）
            {
                flag=0;
                break;
            }
        }
        if（flag==1）
```

```
        {
            //ni=n%pi;
            //array_ni[i]=ni;
            array_pi[i]=pi;
            //array_pi2[i]=pi;
            array_ai[i]=a%pi;
            //array_pi_ni[i]=pi-ni
            //alert（array_pi[i]）;
            i++;
        }
    }

    ther=i;


    for（i=0;i<n-9;i++）{
        array_n[i]=i+10;
        //alert（array_n[i]）;
    }

    for（i=0;i<array_n.length;i++）
    {
        for（k=0;k<array_pi.length;k++）
        {
            if （（ array_n[i]%array_pi[k]==0 ） ||
（array_n[i]%array_pi[k]==array_ai[k]））
                {
                    array_n[i]=0;
                    break;
                }
```

```
        }
    }
    x=0;
    for（i=0;i<array_n.length;i++）{
        if（array_n[i]>0）
        x++;
        //alert（array_n[i]）;
    }
    var xx=0;
    var theflag;
    for（i=1;i<array_pi.length;i++）{
        theflag=1;
        for（k=0;k<array_pi.length;k++）
        {
            if（(array_pi[i]%array_pi[k]==array_ai[k])）
                {
                    theflag=0;
                    break;
                }

        }if（theflag==1）{
            array_hi[xx]=array_pi[i];
            xx++;
        }
    }
    if（xx>0）{
        document.write（"<br><font color=#0000FF size=3>从集合P中求得的解的个数为：</font>" + xx + "<br>"）;
        document.write（"<font color=#0000FF size=3>从集合P中求得的解：</font><br>"）;
```

```
var astr=new String（a）;
var thelength=astr.length;
var x11,y11;
m=1;
for（i=0;i<array_hi.length;i++）
{

        x1=array_hi[i];
        y1=a-array_hi[i];
        x11=new String（x1）;
        for（var iii=x11.length;iii<thelength;iii++）{
            x11="0"+""+x11;
        }
        y11=new String（y1）;
        for（var iii=y11.length;iii<thelength;iii++）{
            y11="0"+""+y11;
        }
        document.write          （          "<font
size='4'>x</font>="+x11+"  <font  size='4'>y</font>="+y11+"  ;
    "）;
        if（m%4==0）
        {
          document.write（"<br>"）;

        }
         m=m+1;


}
```

```
    }
    document.write ("<br><font color=#0000FF size=3>从集合
N 中求得的解的个数为：</font>" + x + "<br>") ;
    if (x>0) {
        document.write ("<font color=#0000FF size=3>从集合 N
中求得的解：</font><br>") ;
        var astr=new String (a) ;
        var thelength=astr.length;
        var x11,y11;
        m=1;
        for (i=0;i<array_n.length;i++)
        {
            switch (array_n[i])
            {
                case 0: break;
                default:
                        x1=array_n[i];
                        y1=a-array_n[i];
                        x11=new String (x1) ;
                        for (var iii=x11.length;iii<thelength;iii++) {
                                x11="0"+""+x11;
                        }
                        y11=new String (y1) ;
                        for (var iii=y11.length;iii<thelength;iii++) {
                                y11="0"+""+y11;
                        }
                        document.write          (           "<font
size='4'>x</font>="+x11+"  <font  size='4'>y</font>="+y11+" ;
    ") ;
                        if (m%4==0)
```

```
                    {
                      document.write（"<br>"）;

                    }
                     m=m+1;
            }

        }
    }


    document.all（"wait_div"）.style.display="none";
    document.all（"wait2_div"）.style.display="";
    }
    </script>
    </p></body>
    </html>
```

16.4 实筛数据

输入的偶数 a 为：210　$n=a/2=105$

从集合 P 中求得的解的个数为：2

从集合 P 中求得的解：

x=011 y=199　x=013 y=197

从集合 N 中求得的解的个数为：17

从集合 N 中求得的解：

x=017 y=193　x=019 y=191　x=029 y=181

x=031 y=179　x=037 y=173　x=043 y=167

x=047 y=163　x=053 y=157　x=059 y=151

x=061 y=149　x=071 y=139　x=073 y=137

x=079 y=131　x=083 y=127　x=097 y=113

x=101 y=109　x=103 y=107

输入的偶数 a 为：214　$n = a/2$=107
从集合 P 中求得的解的个数为：1
从集合 P 中求得的解：
x=003 y=211
从集合 N 中求得的解的个数为：7
从集合 N 中求得的解：
x=017 y=197　x=023 y=191　x=041 y=173
x=047 y=167　x=083 y=131　x=101 y=113
x=107 y=107

输入的偶数 a 为：10000　$n = a/2$=5000
从集合 P 中求得的解的个数为：2
从集合 P 中求得的解：
x=00059 y=09941　x=00071 y=09929
从集合 N 中求得的解的个数为：125
从集合 N 中求得的解：
x=00113 y=09887　x=00149 y=09851　x=00167 y=09833
x=00197 y=09803　x=00233 y=09767　x=00251 y=09749
x=00257 y=09743　x=00281 y=09719　x=00311 y=09689
x=00449 y=09551　x=00461 y=09539　x=00467 y=09533
x=00479 y=09521　x=00503 y=09497　x=00509 y=09491
x=00521 y=09479　x=00563 y=09437　x=00569 y=09431
x=00587 y=09413　x=00659 y=09341　x=00677 y=09323
x=00719 y=09281　x=00743 y=09257　x=00761 y=09239
x=00773 y=09227　x=00797 y=09203　x=00827 y=09173
x=00839 y=09161　x=00863 y=09137　x=00941 y=09059
x=00971 y=09029　x=01031 y=08969　x=01049 y=08951

x=01151 y=08849 x=01163 y=08837 x=01181 y=08819
x=01193 y=08807 x=01217 y=08783 x=01259 y=08741
x=01301 y=08699 x=01307 y=08693 x=01319 y=08681
x=01373 y=08627 x=01427 y=08573 x=01487 y=08513
x=01499 y=08501 x=01553 y=08447 x=01571 y=08429
x=01613 y=08387 x=01637 y=08363 x=01709 y=08291
x=01877 y=08123 x=01889 y=08111 x=01907 y=08093
x=01913 y=08087 x=01931 y=08069 x=02063 y=07937
x=02081 y=07919 x=02099 y=07901 x=02207 y=07793
x=02243 y=07757 x=02273 y=07727 x=02297 y=07703
x=02309 y=07691 x=02351 y=07649 x=02357 y=07643
x=02393 y=07607 x=02411 y=07589 x=02417 y=07583
x=02423 y=07577 x=02441 y=07559 x=02459 y=07541
x=02477 y=07523 x=02543 y=07457 x=02549 y=07451
x=02693 y=07307 x=02753 y=07247 x=02789 y=07211
x=02879 y=07121 x=02897 y=07103 x=02957 y=07043
x=02999 y=07001 x=03023 y=06977 x=03041 y=06959
x=03083 y=06917 x=03089 y=06911 x=03137 y=06863
x=03167 y=06833 x=03209 y=06791 x=03221 y=06779
x=03299 y=06701 x=03347 y=06653 x=03449 y=06551
x=03527 y=06473 x=03671 y=06329 x=03677 y=06323
x=03701 y=06299 x=03779 y=06221 x=03797 y=06203
x=03803 y=06197 x=03911 y=06089 x=03947 y=06053
x=03989 y=06011 x=04013 y=05987 x=04019 y=05981
x=04073 y=05927 x=04133 y=05867 x=04139 y=05861
x=04157 y=05843 x=04217 y=05783 x=04259 y=05741
x=04283 y=05717 x=04289 y=05711 x=04349 y=05651
x=04409 y=05591 x=04481 y=05519 x=04493 y=05507
x=04517 y=05483 x=04523 y=05477 x=04583 y=05417
x=04649 y=05351 x=04691 y=05309 x=04703 y=05297
x=04721 y=05279 x=04919 y=05081

输入的偶数 a 为：30000　$n=a/2=15000$

从集合 P 中求得的解的个数为：12

从集合 P 中求得的解：

x=00011 y=29989　x=00017 y=29983　x=00041 y=29959
x=00053 y=29947　x=00073 y=29927　x=00079 y=29921
x=00083 y=29917　x=00127 y=29873　x=00137 y=29863
x=00149 y=29851　x=00163 y=29837　x=00167 y=29833

从集合 N 中求得的解的个数为：590

从集合 N 中求得的解：

x=00181 y=29819　x=00197 y=29803　x=00211 y=29789
x=00239 y=29761　x=00241 y=29759　x=00277 y=29723
x=00283 y=29717　x=00317 y=29683　x=00331 y=29669
x=00337 y=29663　x=00359 y=29641　x=00367 y=29633
x=00389 y=29611　x=00401 y=29599　x=00419 y=29581
x=00431 y=29569　x=00433 y=29567　x=00463 y=29537
x=00499 y=29501　x=00547 y=29453　x=00557 y=29443
x=00563 y=29437　x=00571 y=29429　x=00577 y=29423
x=00599 y=29401　x=00601 y=29399　x=00613 y=29387
x=00617 y=29383　x=00653 y=29347　x=00661 y=29339
x=00673 y=29327　x=00757 y=29243　x=00769 y=29231
x=00809 y=29191　x=00821 y=29179　x=00827 y=29173
x=00853 y=29147　x=00863 y=29137　x=00877 y=29123
x=00937 y=29063　x=00941 y=29059　x=00967 y=29033
x=00977 y=29023　x=00983 y=29017　x=00991 y=29009
x=01021 y=28979　x=01039 y=28961　x=01051 y=28949
x=01091 y=28909　x=01129 y=28871　x=01163 y=28837
x=01187 y=28813　x=01193 y=28807　x=01229 y=28771
x=01249 y=28751　x=01277 y=28723　x=01289 y=28711
x=01297 y=28703　x=01303 y=28697　x=01373 y=28627

x=01381 y=28619 x=01409 y=28591 x=01427 y=28573
x=01429 y=28571 x=01451 y=28549 x=01453 y=28547
x=01459 y=28541 x=01483 y=28517 x=01487 y=28513
x=01523 y=28477 x=01553 y=28447 x=01567 y=28433
x=01571 y=28429 x=01597 y=28403 x=01607 y=28393
x=01613 y=28387 x=01693 y=28307 x=01721 y=28279
x=01723 y=28277 x=01789 y=28211 x=01877 y=28123
x=01889 y=28111 x=01901 y=28099 x=01913 y=28087
x=01931 y=28069 x=01949 y=28051 x=01973 y=28027
x=01999 y=28001 x=02003 y=27997 x=02017 y=27983
x=02039 y=27961 x=02053 y=27947 x=02081 y=27919
x=02083 y=27917 x=02099 y=27901 x=02153 y=27847
x=02207 y=27793 x=02221 y=27779 x=02237 y=27763
x=02251 y=27749 x=02267 y=27733 x=02309 y=27691
x=02311 y=27689 x=02347 y=27653 x=02383 y=27617
x=02389 y=27611 x=02417 y=27583 x=02459 y=27541
x=02473 y=27527 x=02521 y=27479 x=02543 y=27457
x=02551 y=27449 x=02591 y=27409 x=02593 y=27407
x=02633 y=27367 x=02663 y=27337 x=02671 y=27329
x=02719 y=27281 x=02729 y=27271 x=02741 y=27259
x=02789 y=27211 x=02803 y=27197 x=02857 y=27143
x=02897 y=27103 x=02909 y=27091 x=02927 y=27073
x=02939 y=27061 x=02957 y=27043 x=02969 y=27031
x=03019 y=26981 x=03041 y=26959 x=03049 y=26951
x=03079 y=26921 x=03109 y=26891 x=03119 y=26881
x=03121 y=26879 x=03137 y=26863 x=03167 y=26833
x=03187 y=26813 x=03217 y=26783 x=03271 y=26729
x=03299 y=26701 x=03301 y=26699 x=03307 y=26693
x=03313 y=26687 x=03319 y=26681 x=03331 y=26669
x=03359 y=26641 x=03373 y=26627 x=03461 y=26539
x=03499 y=26501 x=03511 y=26489 x=03541 y=26459

x=03583 y=26417　x=03593 y=26407　x=03607 y=26393
x=03613 y=26387　x=03643 y=26357　x=03691 y=26309
x=03733 y=26267　x=03739 y=26261　x=03797 y=26203
x=03823 y=26177　x=03847 y=26153　x=03881 y=26119
x=03889 y=26111　x=03917 y=26083　x=03947 y=26053
x=04001 y=25999　x=04003 y=25997　x=04019 y=25981
x=04049 y=25951　x=04057 y=25943　x=04111 y=25889
x=04127 y=25873　x=04133 y=25867　x=04153 y=25847
x=04159 y=25841　x=04201 y=25799　x=04229 y=25771
x=04241 y=25759　x=04253 y=25747　x=04259 y=25741
x=04283 y=25717　x=04297 y=25703　x=04327 y=25673
x=04357 y=25643　x=04391 y=25609　x=04397 y=25603
x=04421 y=25579　x=04423 y=25577　x=04463 y=25537
x=04547 y=25453　x=04561 y=25439　x=04591 y=25409
x=04643 y=25357　x=04651 y=25349　x=04657 y=25343
x=04679 y=25321　x=04691 y=25309　x=04817 y=25183
x=04831 y=25169　x=04889 y=25111　x=04903 y=25097
x=04943 y=25057　x=04967 y=25033　x=04969 y=25031
x=04987 y=25013　x=05011 y=24989　x=05021 y=24979
x=05023 y=24977　x=05077 y=24923　x=05081 y=24919
x=05153 y=24847　x=05179 y=24821　x=05233 y=24767
x=05237 y=24763　x=05303 y=24697　x=05309 y=24691
x=05323 y=24677　x=05407 y=24593　x=05449 y=24551
x=05483 y=24517　x=05501 y=24499　x=05519 y=24481
x=05527 y=24473　x=05531 y=24469　x=05557 y=24443
x=05581 y=24419　x=05641 y=24359　x=05683 y=24317
x=05749 y=24251　x=05821 y=24179　x=05849 y=24151
x=05867 y=24133　x=05879 y=24121　x=05897 y=24103
x=05903 y=24097　x=05923 y=24077　x=05939 y=24061
x=05981 y=24019　x=06007 y=23993　x=06029 y=23971
x=06043 y=23957　x=06089 y=23911　x=06091 y=23909

x=06101 y=23899 x=06113 y=23887 x=06121 y=23879
x=06131 y=23869 x=06143 y=23857 x=06173 y=23827
x=06199 y=23801 x=06211 y=23789 x=06247 y=23753
x=06257 y=23743 x=06311 y=23689 x=06323 y=23677
x=06329 y=23671 x=06337 y=23663 x=06367 y=23633
x=06373 y=23627 x=06397 y=23603 x=06451 y=23549
x=06469 y=23531 x=06491 y=23509 x=06553 y=23447
x=06569 y=23431 x=06661 y=23339 x=06673 y=23327
x=06679 y=23321 x=06689 y=23311 x=06703 y=23297
x=06709 y=23291 x=06791 y=23209 x=06803 y=23197
x=06827 y=23173 x=06833 y=23167 x=06841 y=23159
x=06857 y=23143 x=06869 y=23131 x=06883 y=23117
x=06947 y=23053 x=06959 y=23041 x=06961 y=23039
x=06971 y=23029 x=06983 y=23017 x=06997 y=23003
x=07027 y=22973 x=07039 y=22961 x=07057 y=22943
x=07079 y=22921 x=07129 y=22871 x=07193 y=22807
x=07213 y=22787 x=07283 y=22717 x=07309 y=22691
x=07321 y=22679 x=07331 y=22669 x=07349 y=22651
x=07433 y=22567 x=07451 y=22549 x=07457 y=22543
x=07459 y=22541 x=07489 y=22511 x=07499 y=22501
x=07517 y=22483 x=07547 y=22453 x=07559 y=22441
x=07591 y=22409 x=07603 y=22397 x=07717 y=22283
x=07723 y=22277 x=07727 y=22273 x=07741 y=22259
x=07753 y=22247 x=07829 y=22171 x=07841 y=22159
x=07853 y=22147 x=07867 y=22133 x=07877 y=22123
x=07907 y=22093 x=07927 y=22073 x=07933 y=22067
x=07937 y=22063 x=07949 y=22051 x=07963 y=22037
x=08009 y=21991 x=08039 y=21961 x=08089 y=21911
x=08161 y=21839 x=08179 y=21821 x=08233 y=21767
x=08243 y=21757 x=08263 y=21737 x=08273 y=21727
x=08287 y=21713 x=08317 y=21683 x=08353 y=21647

x=08387 y=21613　x=08389 y=21611　x=08423 y=21577
x=08431 y=21569　x=08443 y=21557　x=08501 y=21499
x=08513 y=21487　x=08581 y=21419　x=08599 y=21401
x=08609 y=21391　x=08623 y=21377　x=08677 y=21323
x=08681 y=21319　x=08731 y=21269　x=08753 y=21247
x=08779 y=21221　x=08807 y=21193　x=08821 y=21179
x=08831 y=21169　x=08837 y=21163　x=08861 y=21139
x=08893 y=21107　x=08933 y=21067　x=08941 y=21059
x=08969 y=21031　x=08999 y=21001　x=09041 y=20959
x=09103 y=20897　x=09127 y=20873　x=09151 y=20849
x=09227 y=20773　x=09241 y=20759　x=09257 y=20743
x=09281 y=20719　x=09283 y=20717　x=09293 y=20707
x=09319 y=20681　x=09337 y=20663　x=09437 y=20563
x=09467 y=20533　x=09479 y=20521　x=09491 y=20509
x=09521 y=20479　x=09601 y=20399　x=09631 y=20369
x=09643 y=20357　x=09677 y=20323　x=09739 y=20261
x=09767 y=20233　x=09769 y=20231　x=09781 y=20219
x=09817 y=20183　x=09839 y=20161　x=09851 y=20149
x=09857 y=20143　x=09871 y=20129　x=09883 y=20117
x=09887 y=20113　x=09929 y=20071　x=09949 y=20051
x=10007 y=19993　x=10009 y=19991　x=10037 y=19963
x=10039 y=19961　x=10111 y=19889　x=10133 y=19867
x=10139 y=19861　x=10159 y=19841　x=10181 y=19819
x=10223 y=19777　x=10247 y=19753　x=10273 y=19727
x=10301 y=19699　x=10303 y=19697　x=10313 y=19687
x=10391 y=19609　x=10429 y=19571　x=10457 y=19543
x=10459 y=19541　x=10499 y=19501　x=10529 y=19471
x=10531 y=19469　x=10559 y=19441　x=10567 y=19433
x=10597 y=19403　x=10613 y=19387　x=10627 y=19373
x=10667 y=19333　x=10691 y=19309　x=10711 y=19289
x=10733 y=19267　x=10781 y=19219　x=10789 y=19211

x=10837 y=19163 x=10859 y=19141 x=10861 y=19139
x=10949 y=19051 x=10987 y=19013 x=11027 y=18973
x=11083 y=18917 x=11087 y=18913 x=11131 y=18869
x=11161 y=18839 x=11197 y=18803 x=11213 y=18787
x=11243 y=18757 x=11251 y=18749 x=11257 y=18743
x=11287 y=18713 x=11299 y=18701 x=11321 y=18679
x=11329 y=18671 x=11383 y=18617 x=11447 y=18553
x=11483 y=18517 x=11497 y=18503 x=11519 y=18481
x=11549 y=18451 x=11587 y=18413 x=11621 y=18379
x=11633 y=18367 x=11689 y=18311 x=11699 y=18301
x=11731 y=18269 x=11743 y=18257 x=11777 y=18223
x=11783 y=18217 x=11789 y=18211 x=11801 y=18199
x=11831 y=18169 x=11867 y=18133 x=11903 y=18097
x=11923 y=18077 x=11939 y=18061 x=11941 y=18059
x=11953 y=18047 x=11959 y=18041 x=11987 y=18013
x=12011 y=17989 x=12041 y=17959 x=12043 y=17957
x=12071 y=17929 x=12097 y=17903 x=12109 y=17891
x=12119 y=17881 x=12149 y=17851 x=12161 y=17839
x=12163 y=17837 x=12211 y=17789 x=12239 y=17761
x=12251 y=17749 x=12253 y=17747 x=12263 y=17737
x=12343 y=17657 x=12373 y=17627 x=12377 y=17623
x=12391 y=17609 x=12401 y=17599 x=12421 y=17579
x=12491 y=17509 x=12503 y=17497 x=12511 y=17489
x=12517 y=17483 x=12569 y=17431 x=12583 y=17417
x=12611 y=17389 x=12613 y=17387 x=12641 y=17359
x=12659 y=17341 x=12743 y=17257 x=12791 y=17209
x=12809 y=17191 x=12841 y=17159 x=12893 y=17107
x=12907 y=17093 x=12923 y=17077 x=12953 y=17047
x=12959 y=17041 x=12967 y=17033 x=12973 y=17027
x=12979 y=17021 x=13007 y=16993 x=13037 y=16963
x=13063 y=16937 x=13099 y=16901 x=13121 y=16879

x=13171 y=16829　x=13177 y=16823　x=13241 y=16759
x=13259 y=16741　x=13297 y=16703　x=13309 y=16691
x=13327 y=16673　x=13339 y=16661　x=13367 y=16633
x=13381 y=16619　x=13397 y=16603　x=13513 y=16487
x=13523 y=16477　x=13553 y=16447　x=13567 y=16433
x=13619 y=16381　x=13681 y=16319　x=13751 y=16249
x=13807 y=16193　x=13859 y=16141　x=13873 y=16127
x=13903 y=16097　x=13913 y=16087　x=13931 y=16069
x=13933 y=16067　x=13967 y=16033　x=13999 y=16001
x=14009 y=15991　x=14029 y=15971　x=14081 y=15919
x=14087 y=15913　x=14177 y=15823　x=14197 y=15803
x=14251 y=15749　x=14321 y=15679　x=14419 y=15581
x=14431 y=15569　x=14449 y=15551　x=14489 y=15511
x=14503 y=15497　x=14533 y=15467　x=14549 y=15451
x=14557 y=15443　x=14561 y=15439　x=14627 y=15373
x=14639 y=15361　x=14669 y=15331　x=14713 y=15287
x=14723 y=15277　x=14731 y=15269　x=14737 y=15263
x=14741 y=15259　x=14759 y=15241　x=14767 y=15233
x=14783 y=15217　x=14813 y=15187　x=14827 y=15173
x=14851 y=15149　x=14869 y=15131　x=14879 y=15121
x=14923 y=15077　x=14939 y=15061　x=14947 y=15053
x=14969 y=15031　x=14983 y=15017

附表　200000 以内的素数表

000002 000003 000005 000007 000011 000013 000017 000019

000023 000029 000031 000037 000041 000043 000047 000053

000059 000061 000067 000071 000073 000079 000083 000089

000097 000101 000103 000107 000109 000113 000127 000131

000137 000139 000149 000151 000157 000163 000167 000173

000179 000181 000191 000193 000197 000199 000211 000223

000227 000229 000233 000239 000241 000251 000257 000263

000269 000271 000277 000281 000283 000293 000307 000311

000313 000317 000331 000337 000347 000349 000353 000359

000367 000373 000379 000383 000389 000397 000401 000409

000419 000421 000431 000433 000439 000443

000449 000457 000461 000463 000467 000479 000487 000491

000499 000503 000509 000521 000523 000541 000547 000557

000563 000569 000571 000577 000587 000593 000599 000601

000607 000613 000617 000619 000631 000641 000643 000647

000653 000659 000661 000673 000677 000683 000691 000701

000709 000719 000727 000733 000739 000743 000751 000757

000761 000769 000773 000787 000797 000809 000811 000821

000823 000827 000829 000839 000853 000857 000859 000863

000877 000881 000883 000887 000907 000911 000919 000929

000937 000941 000947 000953 000967 000971 000977 000983

000991 000997 001009 001013 001019 001021 001031 001033

001039 001049 001051 001061 001063 001069 001087 001091

001093 001097 001103 001109 001117 001123 001129 001151

001153 001163 001171 001181 001187 001193 001201 001213

001217 001223 001229 001231 001237 001249 001259 001277

001279 001283 001289 001291 001297 001301 001303 001307

001319 001321 001327 001361 001367 001373 001381 001399
001409 001423 001427 001429 001433 001439 001447 001451
001453 001459 001471 001481 001483 001487 001489 001493
001499 001511 001523 001531 001543 001549 001553 001559
001567 001571 001579 001583 001597 001601 001607 001609
001613 001619 001621 001627 001637 001657 001663 001667
001669 001693 001697 001699 001709 001721 001723 001733
001741 001747 001753 001759 001777 001783 001787 001789
001801 001811 001823 001831 001847 001861 001867 001871
001873 001877 001879 001889 001901 001907 001913 001931
001933 001949 001951 001973 001979 001987 001993 001997
001999 002003 002011 002017 002027 002029 002039 002053
002063 002069 002081 002083 002087 002089 002099 002111
002113 002129 002131 002137 002141 002143 002153 002161
002179 002203 002207 002213 002221 002237 002239 002243
002251 002267 002269 002273 002281 002287 002293 002297
002309 002311 002333 002339 002341 002347 002351 002357
002371 002377 002381 002383 002389 002393 002399 002411
002417 002423 002437 002441 002447 002459 002467 002473
002477 002503 002521 002531 002539 002543 002549 002551
002557 002579 002591 002593 002609 002617 002621 002633
002647 002657 002659 002663 002671 002677 002683 002687
002689 002693 002699 002707 002711 002713 002719 002729
002731 002741 002749 002753 002767 002777 002789 002791
002797 002801 002803 002819 002833 002837 002843 002851
002857 002861 002879 002887 002897 002903 002909 002917
002927 002939 002953 002957 002963 002969 002971 002999
003001 003011 003019 003023 003037 003041 003049 003061
003067 003079 003083 003089 003109 003119 003121 003137
003163 003167 003169 003181 003187 003191 003203 003209
003217 003221 003229 003251 003253 003257 003259 003271

003299	003301	003307	003313	003319	003323	003329	003331
003343	003347	003359	003361	003371	003373	003389	003391
003407	003413	003433	003449	003457	003461	003463	003467
003469	003491	003499	003511	003517	003527	003529	003533
003539	003541	003547	003557	003559	003571	003581	003583
003593	003607	003613	003617	003623	003631	003637	003643
003659	003671	003673	003677	003691	003697	003701	003709
003719	003727	003733	003739	003761	003767	003769	003779
003793	003797	003803	003821	003823	003833	003847	003851
003853	003863	003877	003881	003889	003907	003911	003917
003919	003923	003929	003931	003943	003947	003967	003989
004001	004003	004007	004013	004019	004021	004027	004049
004051	004057	004073	004079	004091	004093	004099	004111
004127	004129	004133	004139	004153	004157	004159	004177
004201	004211	004217	004219	004229	004231	004241	004243
004253	004259	004261	004271	004273	004283	004289	004297
004327	004337	004339	004349	004357	004363	004373	004391
004397	004409	004421	004423	004441	004447	004451	004457
004463	004481	004483	004493	004507	004513	004517	004519
004523	004547	004549	004561	004567	004583	004591	004597
004603	004621	004637	004639	004643	004649	004651	004657
004663	004673	004679	004691	004703	004721	004723	004729
004733	004751	004759	004783	004787	004789	004793	004799
004801	004813	004817	004831	004861	004871	004877	004889
004903	004909	004919	004931	004933	004937	004943	004951
004957	004967	004969	004973	004987	004993	004999	005003
005009	005011	005021	005023	005039	005051	005059	005077
005081	005087	005099	005101	005107	005113	005119	005147
005153	005167	005171	005179	005189	005197	005209	005227
005231	005233	005237	005261	005273	005279	005281	005297
005303	005309	005323	005333	005347	005351	005381	005387

005393 005399 005407 005413 005417 005419 005431 005437
005441 005443 005449 005471 005477 005479 005483 005501
005503 005507 005519 005521 005527 005531 005557 005563
005569 005573 005581 005591 005623 005639 005641 005647
005651 005653 005657 005659 005669 005683 005689 005693
005701 005711 005717 005737 005741 005743 005749 005779
005783 005791 005801 005807 005813 005821 005827 005839
005843 005849 005851 005857 005861 005867 005869 005879
005881 005897 005903 005923 005927 005939 005953 005981
005987 006007 006011 006029 006037 006043 006047 006053
006067 006073 006079 006089 006091 006101 006113 006121
006131 006133 006143 006151 006163 006173 006197 006199
006203 006211 006217 006221 006229 006247 006257 006263
006269 006271 006277 006287 006299 006301 006311 006317
006323 006329 006337 006343 006353 006359 006361 006367
006373 006379 006389 006397 006421 006427 006449 006451
006469 006473 006481 006491 006521 006529 006547 006551
006553 006563 006569 006571 006577 006581 006599 006607
006619 006637 006653 006659 006661 006673 006679 006689
006691 006701 006703 006709 006719 006733 006737 006761
006763 006779 006781 006791 006793 006803 006823 006827
006829 006833 006841 006857 006863 006869 006871 006883
006899 006907 006911 006917 006947 006949 006959 006961
006967 006971 006977 006983 006991 006997 007001 007013
007019 007027 007039 007043 007057 007069 007079 007103
007109 007121 007127 007129 007151 007159 007177 007187
007193 007207 007211 007213 007219 007229 007237 007243
007247 007253 007283 007297 007307 007309 007321 007331
007333 007349 007351 007369 007393 007411 007417 007433
007451 007457 007459 007477 007481 007487 007489 007499
007507 007517 007523 007529 007537 007541 007547 007549

007559 007561 007573 007577 007583 007589 007591 007603
007607 007621 007639 007643 007649 007669 007673 007681
007687 007691 007699 007703 007717 007723 007727 007741
007753 007757 007759 007789 007793 007817 007823 007829
007841 007853 007867 007873 007877 007879 007883 007901
007907 007919 007927 007933 007937 007949 007951 007963
007993 008009 008011 008017 008039 008053 008059 008069
008081 008087 008089 008093 008101 008111 008117 008123
008147 008161 008167 008171 008179 008191 008209 008219
008221 008231 008233 008237 008243 008263 008269 008273
008287 008291 008293 008297 008311 008317 008329 008353
008363 008369 008377 008387 008389 008419 008423 008429
008431 008443 008447 008461 008467 008501 008513 008521
008527 008537 008539 008543 008563 008573 008581 008597
008599 008609 008623 008627 008629 008641 008647 008663
008669 008677 008681 008689 008693 008699 008707 008713
008719 008731 008737 008741 008747 008753 008761 008779
008783 008803 008807 008819 008821 008831 008837 008839
008849 008861 008863 008867 008887 008893 008923 008929
008933 008941 008951 008963 008969 008971 008999 009001
009007 009011 009013 009029 009041 009043 009049 009059
009067 009091 009103 009109 009127 009133 009137 009151
009157 009161 009173 009181 009187 009199 009203 009209
009221 009227 009239 009241 009257 009277 009281 009283
009293 009311 009319 009323 009337 009341 009343 009349
009371 009377 009391 009397 009403 009413 009419 009421
009431 009433 009437 009439 009461 009463 009467 009473
009479 009491 009497 009511 009521 009533 009539 009547
009551 009587 009601 009613 009619 009623 009629 009631
009643 009649 009661 009677 009679 009689 009697 009719
009721 009733 009739 009743 009749 009767 009769 009781

009787	009791	009803	009811	009817	009829	009833	009839
009851	009857	009859	009871	009883	009887	009901	009907
009923	009929	009931	009941	009949	009967	009973	010007
010009	010037	010039	010061	010067	010069	010079	010091
010093	010099	010103	010111	010133	010139	010141	010151
010159	010163	010169	010177	010181	010193	010211	010223
010243	010247	010253	010259	010267	010271	010273	010289
010301	010303	010313	010321	010331	010333	010337	010343
010357	010369	010391	010399	010427	010429	010433	010453
010457	010459	010463	010477	010487	010499	010501	010513
010529	010531	010559	010567	010589	010597	010601	010607
010613	010627	010631	010639	010651	010657	010663	010667
010687	010691	010709	010711	010723	010729	010733	010739
010753	010771	010781	010789	010799	010831	010837	010847
010853	010859	010861	010867	010883	010889	010891	010903
010909	010937	010939	010949	010957	010973	010979	010987
010993	011003	011027	011047	011057	011059	011069	011071
011083	011087	011093	011113	011117	011119	011131	011149
011159	011161	011171	011173	011177	011197	011213	011239
011243	011251	011257	011261	011273	011279	011287	011299
011311	011317	011321	011329	011351	011353	011369	011383
011393	011399	011411	011423	011437	011443	011447	011467
011471	011483	011489	011491	011497	011503	011519	011527
011549	011551	011579	011587	011593	011597	011617	011621
011633	011657	011677	011681	011689	011699	011701	011717
011719	011731	011743	011777	011779	011783	011789	011801
011807	011813	011821	011827	011831	011833	011839	011863
011867	011887	011897	011903	011909	011923	011927	011933
011939	011941	011953	011959	011969	011971	011981	011987
012007	012011	012037	012041	012043	012049	012071	012073
012097	012101	012107	012109	012113	012119	012143	012149

012157 012161 012163 012197 012203 012211 012227 012239
012241 012251 012253 012263 012269 012277 012281 012289
012301 012323 012329 012343 012347 012373 012377 012379
012391 012401 012409 012413 012421 012433 012437 012451
012457 012473 012479 012487 012491 012497 012503 012511
012517 012527 012539 012541 012547 012553 012569 012577
012583 012589 012601 012611 012613 012619 012637 012641
012647 012653 012659 012671 012689 012697 012703 012713
012721 012739 012743 012757 012763 012781 012791 012799
012809 012821 012823 012829 012841 012853 012889 012893
012899 012907 012911 012917 012919 012923 012941 012953
012959 012967 012973 012979 012983 013001 013003 013007
013009 013033 013037 013043 013049 013063 013093 013099
013103 013109 013121 013127 013147 013151 013159 013163
013171 013177 013183 013187 013217 013219 013229 013241
013249 013259 013267 013291 013297 013309 013313 013327
013331 013337 013339 013367 013381 013397 013399 013411
013417 013421 013441 013451 013457 013463 013469 013477
013487 013499 013513 013523 013537 013553 013567 013577
013591 013597 013613 013619 013627 013633 013649 013669
013679 013681 013687 013691 013693 013697 013709 013711
013721 013723 013729 013751 013757 013759 013763 013781
013789 013799 013807 013829 013831 013841 013859 013873
013877 013879 013883 013901 013903 013907 013913 013921
013931 013933 013963 013967 013997 013999 014009 014011
014029 014033 014051 014057 014071 014081 014083 014087
014107 014143 014149 014153 014159 014173 014177 014197
014207 014221 014243 014249 014251 014281 014293 014303
014321 014323 014327 014341 014347 014369 014387 014389
014401 014407 014411 014419 014423 014431 014437 014447
014449 014461 014479 014489 014503 014519 014533 014537

014543	014549	014551	014557	014561	014563	014591	014593
014621	014627	014629	014633	014639	014653	014657	014669
014683	014699	014713	014717	014723	014731	014737	014741
014747	014753	014759	014767	014771	014779	014783	014797
014813	014821	014827	014831	014843	014851	014867	014869
014879	014887	014891	014897	014923	014929	014939	014947
014951	014957	014969	014983	015013	015017	015031	015053
015061	015073	015077	015083	015091	015101	015107	015121
015131	015137	015139	015149	015161	015173	015187	015193
015199	015217	015227	015233	015241	015259	015263	015269
015271	015277	015287	015289	015299	015307	015313	015319
015329	015331	015349	015359	015361	015373	015377	015383
015391	015401	015413	015427	015439	015443	015451	015461
015467	015473	015493	015497	015511	015527	015541	015551
015559	015569	015581	015583	015601	015607	015619	015629
015641	015643	015647	015649	015661	015667	015671	015679
015683	015727	015731	015733	015737	015739	015749	015761
015767	015773	015787	015791	015797	015803	015809	015817
015823	015859	015877	015881	015887	015889	015901	015907
015913	015919	015923	015937	015959	015971	015973	015991
016001	016007	016033	016057	016061	016063	016067	016069
016073	016087	016091	016097	016103	016111	016127	016139
016141	016183	016187	016189	016193	016217	016223	016229
016231	016249	016253	016267	016273	016301	016319	016333
016339	016349	016361	016363	016369	016381	016411	016417
016421	016427	016433	016447	016451	016453	016477	016481
016487	016493	016519	016529	016547	016553	016561	016567
016573	016603	016607	016619	016631	016633	016649	016651
016657	016661	016673	016691	016693	016699	016703	016729
016741	016747	016759	016763	016787	016811	016823	016829
016831	016843	016871	016879	016883	016889	016901	016903

016921 016927 016931 016937 016943 016963 016979 016981
016987 016993 017011 017021 017027 017029 017033 017041
017047 017053 017077 017093 017099 017107 017117 017123
017137 017159 017167 017183 017189 017191 017203 017207
017209 017231 017239 017257 017291 017293 017299 017317
017321 017327 017333 017341 017351 017359 017377 017383
017387 017389 017393 017401 017417 017419 017431 017443
017449 017467 017471 017477 017483 017489 017491 017497
017509 017519 017539 017551 017569 017573 017579 017581
017597 017599 017609 017623 017627 017657 017659 017669
017681 017683 017707 017713 017729 017737 017747 017749
017761 017783 017789 017791 017807 017827 017837 017839
017851 017863 017881 017891 017903 017909 017911 017921
017923 017929 017939 017957 017959 017971 017977 017981
017987 017989 018013 018041 018043 018047 018049 018059
018061 018077 018089 018097 018119 018121 018127 018131
018133 018143 018149 018169 018181 018191 018199 018211
018217 018223 018229 018233 018251 018253 018257 018269
018287 018289 018301 018307 018311 018313 018329 018341
018353 018367 018371 018379 018397 018401 018413 018427
018433 018439 018443 018451 018457 018461 018481 018493
018503 018517 018521 018523 018539 018541 018553 018583
018587 018593 018617 018637 018661 018671 018679 018691
018701 018713 018719 018731 018743 018749 018757 018773
018787 018793 018797 018803 018839 018859 018869 018899
018911 018913 018917 018919 018947 018959 018973 018979
019001 019009 019013 019031 019037 019051 019069 019073
019079 019081 019087 019121 019139 019141 019157 019163
019181 019183 019207 019211 019213 019219 019231 019237
019249 019259 019267 019273 019289 019301 019309 019319
019333 019373 019379 019381 019387 019391 019403 019417

019421	019423	019427	019429	019433	019441	019447	019457
019463	019469	019471	019477	019483	019489	019501	019507
019531	019541	019543	019553	019559	019571	019577	019583
019597	019603	019609	019661	019681	019687	019697	019699
019709	019717	019727	019739	019751	019753	019759	019763
019777	019793	019801	019813	019819	019841	019843	019853
019861	019867	019889	019891	019913	019919	019927	019937
019949	019961	019963	019973	019979	019991	019993	019997
020011	020021	020023	020029	020047	020051	020063	020071
020089	020101	020107	020113	020117	020123	020129	020143
020147	020149	020161	020173	020177	020183	020201	020219
020231	020233	020249	020261	020269	020287	020297	020323
020327	020333	020341	020347	020353	020357	020359	020369
020389	020393	020399	020407	020411	020431	020441	020443
020477	020479	020483	020507	020509	020521	020533	020543
020549	020551	020563	020593	020599	020611	020627	020639
020641	020663	020681	020693	020707	020717	020719	020731
020743	020747	020749	020753	020759	020771	020773	020789
020807	020809	020849	020857	020873	020879	020887	020897
020899	020903	020921	020929	020939	020947	020959	020963
020981	020983	021001	021011	021013	021017	021019	021023
021031	021059	021061	021067	021089	021101	021107	021121
021139	021143	021149	021157	021163	021169	021179	021187
021191	021193	021211	021221	021227	021247	021269	021277
021283	021313	021317	021319	021323	021341	021347	021377
021379	021383	021391	021397	021401	021407	021419	021433
021467	021481	021487	021491	021493	021499	021503	021517
021521	021523	021529	021557	021559	021563	021569	021577
021587	021589	021599	021601	021611	021613	021617	021647
021649	021661	021673	021683	021701	021713	021727	021737
021739	021751	021757	021767	021773	021787	021799	021803

021817	021821	021839	021841	021851	021859	021863	021871
021881	021893	021911	021929	021937	021943	021961	021977
021991	021997	022003	022013	022027	022031	022037	022039
022051	022063	022067	022073	022079	022091	022093	022109
022111	022123	022129	022133	022147	022153	022157	022159
022171	022189	022193	022229	022247	022259	022271	022273
022277	022279	022283	022291	022303	022307	022343	022349
022367	022369	022381	022391	022397	022409	022433	022441
022447	022453	022469	022481	022483	022501	022511	022531
022541	022543	022549	022567	022571	022573	022613	022619
022621	022637	022639	022643	022651	022669	022679	022691
022697	022699	022709	022717	022721	022727	022739	022741
022751	022769	022777	022783	022787	022807	022811	022817
022853	022859	022861	022871	022877	022901	022907	022921
022937	022943	022961	022963	022973	022993	023003	023011
023017	023021	023027	023029	023039	023041	023053	023057
023059	023063	023071	023081	023087	023099	023117	023131
023143	023159	023167	023173	023189	023197	023201	023203
023209	023227	023251	023269	023279	023291	023293	023297
023311	023321	023327	023333	023339	023357	023369	023371
023399	023417	023431	023447	023459	023473	023497	023509
023531	023537	023539	023549	023557	023561	023563	023567
023581	023593	023599	023603	023609	023623	023627	023629
023633	023663	023669	023671	023677	023687	023689	023719
023741	023743	023747	023753	023761	023767	023773	023789
023801	023813	023819	023827	023831	023833	023857	023869
023873	023879	023887	023893	023899	023909	023911	023917
023929	023957	023971	023977	023981	023993	024001	024007
024019	024023	024029	024043	024049	024061	024071	024077
024083	024091	024097	024103	024107	024109	024113	024121
024133	024137	024151	024169	024179	024181	024197	024203

024223 024229 024239 024247 024251 024281 024317 024329
024337 024359 024371 024373 024379 024391 024407 024413
024419 024421 024439 024443 024469 024473 024481 024499
024509 024517 024527 024533 024547 024551 024571 024593
024611 024623 024631 024659 024671 024677 024683 024691
024697 024709 024733 024749 024763 024767 024781 024793
024799 024809 024821 024841 024847 024851 024859 024877
024889 024907 024917 024919 024923 024943 024953 024967
024971 024977 024979 024989 025013 025031 025033 025037
025057 025073 025087 025097 025111 025117 025121 025127
025147 025153 025163 025169 025171 025183 025189 025219
025229 025237 025243 025247 025253 025261 025301 025303
025307 025309 025321 025339 025343 025349 025357 025367
025373 025391 025409 025411 025423 025439 025447 025453
025457 025463 025469 025471 025523 025537 025541 025561
025577 025579 025583 025589 025601 025603 025609 025621
025633 025639 025643 025657 025667 025673 025679 025693
025703 025717 025733 025741 025747 025759 025763 025771
025793 025799 025801 025819 025841 025847 025849 025867
025873 025889 025903 025913 025919 025931 025933 025939
025943 025951 025969 025981 025997 025999 026003 026017
026021 026029 026041 026053 026083 026099 026107 026111
026113 026119 026141 026153 026161 026171 026177 026183
026189 026203 026209 026227 026237 026249 026251 026261
026263 026267 026293 026297 026309 026317 026321 026339
026347 026357 026371 026387 026393 026399 026407 026417
026423 026431 026437 026449 026459 026479 026489 026497
026501 026513 026539 026557 026561 026573 026591 026597
026627 026633 026641 026647 026669 026681 026683 026687
026693 026699 026701 026711 026713 026717 026723 026729
026731 026737 026759 026777 026783 026801 026813 026821

026833	026839	026849	026861	026863	026879	026881	026891
026893	026903	026921	026927	026947	026951	026953	026959
026981	026987	026993	027011	027017	027031	027043	027059
027061	027067	027073	027077	027091	027103	027107	027109
027127	027143	027179	027191	027197	027211	027239	027241
027253	027259	027271	027277	027281	027283	027299	027329
027337	027361	027367	027397	027407	027409	027427	027431
027437	027449	027457	027479	027481	027487	027509	027527
027529	027539	027541	027551	027581	027583	027611	027617
027631	027647	027653	027673	027689	027691	027697	027701
027733	027737	027739	027743	027749	027751	027763	027767
027773	027779	027791	027793	027799	027803	027809	027817
027823	027827	027847	027851	027883	027893	027901	027917
027919	027941	027943	027947	027953	027961	027967	027983
027997	028001	028019	028027	028031	028051	028057	028069
028081	028087	028097	028099	028109	028111	028123	028151
028163	028181	028183	028201	028211	028219	028229	028277
028279	028283	028289	028297	028307	028309	028319	028349
028351	028387	028393	028403	028409	028411	028429	028433
028439	028447	028463	028477	028493	028499	028513	028517
028537	028541	028547	028549	028559	028571	028573	028579
028591	028597	028603	028607	028619	028621	028627	028631
028643	028649	028657	028661	028663	028669	028687	028697
028703	028711	028723	028729	028751	028753	028759	028771
028789	028793	028807	028813	028817	028837	028843	028859
028867	028871	028879	028901	028909	028921	028927	028933
028949	028961	028979	029009	029017	029021	029023	029027
029033	029059	029063	029077	029101	029123	029129	029131
029137	029147	029153	029167	029173	029179	029191	029201
029207	029209	029221	029231	029243	029251	029269	029287
029297	029303	029311	029327	029333	029339	029347	029363

029383 029387 029389 029399 029401 029411 029423 029429
029437 029443 029453 029473 029483 029501 029527 029531
029537 029567 029569 029573 029581 029587 029599 029611
029629 029633 029641 029663 029669 029671 029683 029717
029723 029741 029753 029759 029761 029789 029803 029819
029833 029837 029851 029863 029867 029873 029879 029881
029917 029921 029927 029947 029959 029983 029989 030011
030013 030029 030047 030059 030071 030089 030091 030097
030103 030109 030113 030119 030133 030137 030139 030161
030169 030181 030187 030197 030203 030211 030223 030241
030253 030259 030269 030271 030293 030307 030313 030319
030323 030341 030347 030367 030389 030391 030403 030427
030431 030449 030467 030469 030491 030493 030497 030509
030517 030529 030539 030553 030557 030559 030577 030593
030631 030637 030643 030649 030661 030671 030677 030689
030697 030703 030707 030713 030727 030757 030763 030773
030781 030803 030809 030817 030829 030839 030841 030851
030853 030859 030869 030871 030881 030893 030911 030931
030937 030941 030949 030971 030977 030983 031013 031019
031033 031039 031051 031063 031069 031079 031081 031091
031121 031123 031139 031147 031151 031153 031159 031177
031181 031183 031189 031193 031219 031223 031231 031237
031247 031249 031253 031259 031267 031271 031277 031307
031319 031321 031327 031333 031337 031357 031379 031387
031391 031393 031397 031469 031477 031481 031489 031511
031513 031517 031531 031541 031543 031547 031567 031573

031583 031601 031607 031627 031643 031649 031657 031663
031667 031687 031699 031721 031723 031727 031729 031741
031751 031769 031771 031793 031799 031817 031847 031849
031859 031873 031883 031891 031907 031957 031963 031973

031981 031991 032003 032009 032027 032029 032051 032057
032059 032063 032069 032077 032083 032089 032099 032117
032119 032141 032143 032159 032173 032183 032189 032191
032203 032213 032233 032237 032251 032257 032261 032297
032299 032303 032309 032321 032323 032327 032341 032353
032359 032363 032369 032371 032377 032381 032401 032411
032413 032423 032429 032441 032443 032467 032479 032491
032497 032503 032507 032531 032533 032537 032561 032563
032569 032573 032579 032587 032603 032609 032611 032621
032633 032647 032653 032687 032693 032707 032713 032717
032719 032749 032771 032779 032783 032789 032797 032801
032803 032831 032833 032839 032843 032869 032887 032909
032911 032917 032933 032939 032941 032957 032969 032971
032983 032987 032993 032999 033013 033023 033029 033037
033049 033053 033071 033073 033083 033091 033107 033113
033119 033149 033151 033161 033179 033181 033191 033199
033203 033211 033223 033247 033287 033289 033301 033311
033317 033329 033331 033343 033347 033349 033353 033359
033377 033391 033403 033409 033413 033427 033457 033461
033469 033479 033487 033493 033503 033521 033529 033533
033547 033563 033569 033577 033581 033587 033589 033599
033601 033613 033617 033619 033623 033629 033637 033641
033647 033679 033703 033713 033721 033739 033749 033751
033757 033767 033769 033773 033791 033797 033809 033811
033827 033829 033851 033857 033863 033871 033889 033893
033911 033923 033931 033937 033941 033961 033967 033997
034019 034031 034033 034039 034057 034061 034123 034127
034129 034141 034147 034157 034159 034171 034183 034211
034213 034217 034231 034253 034259 034261 034267 034273
034283 034297 034301 034303 034313 034319 034327 034337
034351 034361 034367 034369 034381 034403 034421 034429

034439	034457	034469	034471	034483	034487	034499	034501
034511	034513	034519	034537	034543	034549	034583	034589
034591	034603	034607	034613	034631	034649	034651	034667
034673	034679	034687	034693	034703	034721	034729	034739
034747	034757	034759	034763	034781	034807	034819	034841
034843	034847	034849	034871	034877	034883	034897	034913
034919	034939	034949	034961	034963	034981	035023	035027
035051	035053	035059	035069	035081	035083	035089	035099
035107	035111	035117	035129	035141	035149	035153	035159
035171	035201	035221	035227	035251	035257	035267	035279
035281	035291	035311	035317	035323	035327	035339	035353
035363	035381	035393	035401	035407	035419	035423	035437
035447	035449	035461	035491	035507	035509	035521	035527
035531	035533	035537	035543	035569	035573	035591	035593
035597	035603	035617	035671	035677	035729	035731	035747
035753	035759	035771	035797	035801	035803	035809	035831
035837	035839	035851	035863	035869	035879	035897	035899
035911	035923	035933	035951	035963	035969	035977	035983
035993	035999	036007	036011	036013	036017	036037	036061
036067	036073	036083	036097	036107	036109	036131	036137
036151	036161	036187	036191	036209	036217	036229	036241
036251	036263	036269	036277	036293	036299	036307	036313
036319	036341	036343	036353	036373	036383	036389	036433
036451	036457	036467	036469	036473	036479	036493	036497
036523	036527	036529	036541	036551	036559	036563	036571
036583	036587	036599	036607	036629	036637	036643	036653
036671	036677	036683	036691	036697	036709	036713	036721
036739	036749	036761	036767	036779	036781	036787	036791
036793	036809	036821	036833	036847	036857	036871	036877
036887	036899	036901	036913	036919	036923	036929	036931
036943	036947	036973	036979	036997	037003	037013	037019

037021 037039 037049 037057 037061 037087 037097 037117
037123 037139 037159 037171 037181 037189 037199 037201
037217 037223 037243 037253 037273 037277 037307 037309
037313 037321 037337 037339 037357 037361 037363 037369
037379 037397 037409 037423 037441 037447 037463 037483
037489 037493 037501 037507 037511 037517 037529 037537
037547 037549 037561 037567 037571 037573 037579 037589
037591 037607 037619 037633 037643 037649 037657 037663
037691 037693 037699 037717 037747 037781 037783 037799
037811 037813 037831 037847 037853 037861 037871 037879
037889 037897 037907 037951 037957 037963 037967 037987
037991 037993 037997 038011 038039 038047 038053 038069
038083 038113 038119 038149 038153 038167 038177 038183
038189 038197 038201 038219 038231 038237 038239 038261
038273 038281 038287 038299 038303 038317 038321 038327
038329 038333 038351 038371 038377 038393 038431 038447
038449 038453 038459 038461 038501 038543 038557 038561
038567 038569 038593 038603 038609 038611 038629 038639
038651 038653 038669 038671 038677 038693 038699 038707
038711 038713 038723 038729 038737 038747 038749 038767
038783 038791 038803 038821 038833 038839 038851 038861
038867 038873 038891 038903 038917 038921 038923 038933
038953 038959 038971 038977 038993 039019 039023 039041
039043 039047 039079 039089 039097 039103 039107 039113
039119 039133 039139 039157 039161 039163 039181 039191
039199 039209 039217 039227 039229 039233 039239 039241
039251 039293 039301 039313 039317 039323 039341 039343
039359 039367 039371 039373 039383 039397 039409 039419
039439 039443 039451 039461 039499 039503 039509 039511
039521 039541 039551 039563 039569 039581 039607 039619
039623 039631 039659 039667 039671 039679 039703 039709

039719	039727	039733	039749	039761	039769	039779	039791
039799	039821	039827	039829	039839	039841	039847	039857
039863	039869	039877	039883	039887	039901	039929	039937
039953	039971	039979	039983	039989	040009	040013	040031
040037	040039	040063	040087	040093	040099	040111	040123
040127	040129	040151	040153	040163	040169	040177	040189
040193	040213	040231	040237	040241	040253	040277	040283
040289	040343	040351	040357	040361	040387	040423	040427
040429	040433	040459	040471	040483	040487	040493	040499
040507	040519	040529	040531	040543	040559	040577	040583
040591	040597	040609	040627	040637	040639	040693	040697
040699	040709	040739	040751	040759	040763	040771	040787
040801	040813	040819	040823	040829	040841	040847	040849
040853	040867	040879	040883	040897	040903	040927	040933
040939	040949	040961	040973	040993	041011	041017	041023
041039	041047	041051	041057	041077	041081	041113	041117
041131	041141	041143	041149	041161	041177	041179	041183
041189	041201	041203	041213	041221	041227	041231	041233
041243	041257	041263	041269	041281	041299	041333	041341
041351	041357	041381	041387	041389	041399	041411	041413
041443	041453	041467	041479	041491	041507	041513	041519
041521	041539	041543	041549	041579	041593	041597	041603
041609	041611	041617	041621	041627	041641	041647	041651
041659	041669	041681	041687	041719	041729	041737	041759
041761	041771	041777	041801	041809	041813	041843	041849
041851	041863	041879	041887	041893	041897	041903	041911
041927	041941	041947	041953	041957	041959	041969	041981
041983	041999	042013	042017	042019	042023	042043	042061
042071	042073	042083	042089	042101	042131	042139	042157
042169	042179	042181	042187	042193	042197	042209	042221
042223	042227	042239	042257	042281	042283	042293	042299

042307	042323	042331	042337	042349	042359	042373	042379
042391	042397	042403	042407	042409	042433	042437	042443
042451	042457	042461	042463	042467	042473	042487	042491
042499	042509	042533	042557	042569	042571	042577	042589
042611	042641	042643	042649	042667	042677	042683	042689
042697	042701	042703	042709	042719	042727	042737	042743
042751	042767	042773	042787	042793	042797	042821	042829
042839	042841	042853	042859	042863	042899	042901	042923
042929	042937	042943	042953	042961	042967	042979	042989
043003	043013	043019	043037	043049	043051	043063	043067
043093	043103	043117	043133	043151	043159	043177	043189
043201	043207	043223	043237	043261	043271	043283	043291
043313	043319	043321	043331	043391	043397	043399	043403
043411	043427	043441	043451	043457	043481	043487	043499
043517	043541	043543	043573	043577	043579	043591	043597
043607	043609	043613	043627	043633	043649	043651	043661
043669	043691	043711	043717	043721	043753	043759	043777
043781	043783	043787	043789	043793	043801	043853	043867
043889	043891	043913	043933	043943	043951	043961	043963
043969	043973	043987	043991	043997	044017	044021	044027
044029	044041	044053	044059	044071	044087	044089	044101
044111	044119	044123	044129	044131	044159	044171	044179
044189	044201	044203	044207	044221	044249	044257	044263
044267	044269	044273	044279	044281	044293	044351	044357
044371	044381	044383	044389	044417	044449	044453	044483
044491	044497	044501	044507	044519	044531	044533	044537
044543	044549	044563	044579	044587	044617	044621	044623
044633	044641	044647	044651	044657	044683	044687	044699
044701	044711	044729	044741	044753	044771	044773	044777
044789	044797	044809	044819	044839	044843	044851	044867
044879	044887	044893	044909	044917	044927	044939	044953

044959	044963	044971	044983	044987	045007	045013	045053
045061	045077	045083	045119	045121	045127	045131	045137
045139	045161	045179	045181	045191	045197	045233	045247
045259	045263	045281	045289	045293	045307	045317	045319
045329	045337	045341	045343	045361	045377	045389	045403
045413	045427	045433	045439	045481	045491	045497	045503
045523	045533	045541	045553	045557	045569	045587	045589
045599	045613	045631	045641	045659	045667	045673	045677
045691	045697	045707	045737	045751	045757	045763	045767
045779	045817	045821	045823	045827	045833	045841	045853
045863	045869	045887	045893	045943	045949	045953	045959
045971	045979	045989	046021	046027	046049	046051	046061
046073	046091	046093	046099	046103	046133	046141	046147
046153	046171	046181	046183	046187	046199	046219	046229
046237	046261	046271	046273	046279	046301	046307	046309
046327	046337	046349	046351	046381	046399	046411	046439
046441	046447	046451	046457	046471	046477	046489	046499
046507	046511	046523	046549	046559	046567	046573	046589
046591	046601	046619	046633	046639	046643	046649	046663
046679	046681	046687	046691	046703	046723	046727	046747
046751	046757	046769	046771	046807	046811	046817	046819
046829	046831	046853	046861	046867	046877	046889	046901
046919	046933	046957	046993	046997	047017	047041	047051
047057	047059	047087	047093	047111	047119	047123	047129
047137	047143	047147	047149	047161	047189	047207	047221
047237	047251	047269	047279	047287	047293	047297	047303
047309	047317	047339	047351	047353	047363	047381	047387
047389	047407	047417	047419	047431	047441	047459	047491
047497	047501	047507	047513	047521	047527	047533	047543
047563	047569	047581	047591	047599	047609	047623	047629
047639	047653	047657	047659	047681	047699	047701	047711

047713 047717 047737 047741 047743 047777 047779 047791
047797 047807 047809 047819 047837 047843 047857 047869
047881 047903 047911 047917 047933 047939 047947 047951
047963 047969 047977 047981 048017 048023 048029 048049
048073 048079 048091 048109 048119 048121 048131 048157
048163 048179 048187 048193 048197 048221 048239 048247
048259 048271 048281 048299 048311 048313 048337 048341
048353 048371 048383 048397 048407 048409 048413 048437
048449 048463 048473 048479 048481 048487 048491 048497
048523 048527 048533 048539 048541 048563 048571 048589
048593 048611 048619 048623 048647 048649 048661 048673
048677 048679 048731 048733 048751 048757 048761 048767
048779 048781 048787 048799 048809 048817 048821 048823
048847 048857 048859 048869 048871 048883 048889 048907
048947 048953 048973 048989 048991 049003 049009 049019
049031 049033 049037 049043 049057 049069 049081 049103
049109 049117 049121 049123 049139 049157 049169 049171
049177 049193 049199 049201 049207 049211 049223 049253
049261 049277 049279 049297 049307 049331 049333 049339
049363 049367 049369 049391 049393 049409 049411 049417
049429 049433 049451 049459 049463 049477 049481 049499
049523 049529 049531 049537 049547 049549 049559 049597
049603 049613 049627 049633 049639 049663 049667 049669
049681 049697 049711 049727 049739 049741 049747 049757
049783 049787 049789 049801 049807 049811 049823 049831
049843 049853 049871 049877 049891 049919 049921 049927
049937 049939 049943 049957 049991 049993 049999 050021
050023 050033 050047 050051 050053 050069 050077 050087
050093 050101 050111 050119 050123 050129 050131 050147
050153 050159 050177 050207 050221 050227 050231 050261
050263 050273 050287 050291 050311 050321 050329 050333

050341	050359	050363	050377	050383	050387	050411	050417
050423	050441	050459	050461	050497	050503	050513	050527
050539	050543	050549	050551	050581	050587	050591	050593
050599	050627	050647	050651	050671	050683	050707	050723
050741	050753	050767	050773	050777	050789	050821	050833
050839	050849	050857	050867	050873	050891	050893	050909
050923	050929	050951	050957	050969	050971	050989	050993
051001	051031	051043	051047	051059	051061	051071	051109
051131	051133	051137	051151	051157	051169	051193	051197
051199	051203	051217	051229	051239	051241	051257	051263
051283	051287	051307	051329	051341	051343	051347	051349
051361	051383	051407	051413	051419	051421	051427	051431
051437	051439	051449	051461	051473	051479	051481	051487
051503	051511	051517	051521	051539	051551	051563	051577
051581	051593	051599	051607	051613	051631	051637	051647
051659	051673	051679	051683	051691	051713	051719	051721
051749	051767	051769	051787	051797	051803	051817	051827
051829	051839	051853	051859	051869	051871	051893	051899
051907	051913	051929	051941	051949	051971	051973	051977
051991	052009	052021	052027	052051	052057	052067	052069
052081	052103	052121	052127	052147	052153	052163	052177
052181	052183	052189	052201	052223	052237	052249	052253
052259	052267	052289	052291	052301	052313	052321	052361
052363	052369	052379	052387	052391	052433	052453	052457
052489	052501	052511	052517	052529	052541	052543	052553
052561	052567	052571	052579	052583	052609	052627	052631
052639	052667	052673	052691	052697	052709	052711	052721
052727	052733	052747	052757	052769	052783	052807	052813
052817	052837	052859	052861	052879	052883	052889	052901
052903	052919	052937	052951	052957	052963	052967	052973
052981	052999	053003	053017	053047	053051	053069	053077

053087 053089 053093 053101 053113 053117 053129 053147
053149 053161 053171 053173 053189 053197 053201 053231
053233 053239 053267 053269 053279 053281 053299 053309
053323 053327 053353 053359 053377 053381 053401 053407
053411 053419 053437 053441 053453 053479 053503 053507
053527 053549 053551 053569 053591 053593 053597 053609
053611 053617 053623 053629 053633 053639 053653 053657
053681 053693 053699 053717 053719 053731 053759 053773
053777 053783 053791 053813 053819 053831 053849 053857
053861 053881 053887 053891 053897 053899 053917 053923
053927 053939 053951 053959 053987 053993 054001 054011
054013 054037 054049 054059 054083 054091 054101 054121
054133 054139 054151 054163 054167 054181 054193 054217
054251 054269 054277 054287 054293 054311 054319 054323
054331 054347 054361 054367 054371 054377 054401 054403
054409 054413 054419 054421 054437 054443 054449 054469
054493 054497 054499 054503 054517 054521 054539 054541
054547 054559 054563 054577 054581 054583 054601 054617
054623 054629 054631 054647 054667 054673 054679 054709
054713 054721 054727 054751 054767 054773 054779 054787
054799 054829 054833 054851 054869 054877 054881 054907
054917 054919 054941 054949 054959 054973 054979 054983
055001 055009 055021 055049 055051 055057 055061 055073
055079 055103 055109 055117 055127 055147 055163 055171
055201 055207 055213 055217 055219 055229 055243 055249
055259 055291 055313 055331 055333 055337 055339 055343
055351 055373 055381 055399 055411 055439 055441 055457
055469 055487 055501 055511 055529 055541 055547 055579
055589 055603 055609 055619 055621 055631 055633 055639
055661 055663 055667 055673 055681 055691 055697 055711
055717 055721 055733 055763 055787 055793 055799 055807

055813	055817	055819	055823	055829	055837	055843	055849
055871	055889	055897	055901	055903	055921	055927	055931
055933	055949	055967	055987	055997	056003	056009	056039
056041	056053	056081	056087	056093	056099	056101	056113
056123	056131	056149	056167	056171	056179	056197	056207
056209	056237	056239	056249	056263	056267	056269	056299
056311	056333	056359	056369	056377	056383	056393	056401
056417	056431	056437	056443	056453	056467	056473	056477
056479	056489	056501	056503	056509	056519	056527	056531
056533	056543	056569	056591	056597	056599	056611	056629
056633	056659	056663	056671	056681	056687	056701	056711
056713	056731	056737	056747	056767	056773	056779	056783
056807	056809	056813	056821	056827	056843	056857	056873
056891	056893	056897	056909	056911	056921	056923	056929
056941	056951	056957	056963	056983	056989	056993	056999
057037	057041	057047	057059	057073	057077	057089	057097
057107	057119	057131	057139	057143	057149	057163	057173
057179	057191	057193	057203	057221	057223	057241	057251
057259	057269	057271	057283	057287	057301	057329	057331
057347	057349	057367	057373	057383	057389	057397	057413
057427	057457	057467	057487	057493	057503	057527	057529
057557	057559	057571	057587	057593	057601	057637	057641
057649	057653	057667	057679	057689	057697	057709	057713
057719	057727	057731	057737	057751	057773	057781	057787
057791	057793	057803	057809	057829	057839	057847	057853
057859	057881	057899	057901	057917	057923	057943	057947
057973	057977	057991	058013	058027	058031	058043	058049
058057	058061	058067	058073	058099	058109	058111	058129
058147	058151	058153	058169	058171	058189	058193	058199
058207	058211	058217	058229	058231	058237	058243	058271
058309	058313	058321	058337	058363	058367	058369	058379

058391 058393 058403 058411 058417 058427 058439 058441
058451 058453 058477 058481 058511 058537 058543 058549
058567 058573 058579 058601 058603 058613 058631 058657
058661 058679 058687 058693 058699 058711 058727 058733
058741 058757 058763 058771 058787 058789 058831 058889
058897 058901 058907 058909 058913 058921 058937 058943
058963 058967 058979 058991 058997 059009 059011 059021
059023 059029 059051 059053 059063 059069 059077 059083
059093 059107 059113 059119 059123 059141 059149 059159
059167 059183 059197 059207 059209 059219 059221 059233
059239 059243 059263 059273 059281 059333 059341 059351
059357 059359 059369 059377 059387 059393 059399 059407
059417 059419 059441 059443 059447 059453 059467 059471
059473 059497 059509 059513 059539 059557 059561 059567
059581 059611 059617 059621 059627 059629 059651 059659
059663 059669 059671 059693 059699 059707 059723 059729
059743 059747 059753 059771 059779 059791 059797 059809
059833 059863 059879 059887 059921 059929 059951 059957
059971 059981 059999 060013 060017 060029 060037 060041
060077 060083 060089 060091 060101 060103 060107 060127
060133 060139 060149 060161 060167 060169 060209 060217
060223 060251 060257 060259 060271 060289 060293 060317
060331 060337 060343 060353 060373 060383 060397 060413
060427 060443 060449 060457 060493 060497 060509 060521
060527 060539 060589 060601 060607 060611 060617 060623
060631 060637 060647 060649 060659 060661 060679 060689
060703 060719 060727 060733 060737 060757 060761 060763
060773 060779 060793 060811 060821 060859 060869 060887
060889 060899 060901 060913 060917 060919 060923 060937
060943 060953 060961 061001 061007 061027 061031 061043
061051 061057 061091 061099 061121 061129 061141 061151

061153 061169 061211 061223 061231 061253 061261 061283
061291 061297 061331 061333 061339 061343 061357 061363
061379 061381 061403 061409 061417 061441 061463 061469
061471 061483 061487 061493 061507 061511 061519 061543
061547 061553 061559 061561 061583 061603 061609 061613
061627 061631 061637 061643 061651 061657 061667 061673
061681 061687 061703 061717 061723 061729 061751 061757
061781 061813 061819 061837 061843 061861 061871 061879
061909 061927 061933 061949 061961 061967 061979 061981
061987 061991 062003 062011 062017 062039 062047 062053
062057 062071 062081 062099 062119 062129 062131 062137
062141 062143 062171 062189 062191 062201 062207 062213
062219 062233 062273 062297 062299 062303 062311 062323
062327 062347 062351 062383 062401 062417 062423 062459
062467 062473 062477 062483 062497 062501 062507 062533
062539 062549 062563 062581 062591 062597 062603 062617
062627 062633 062639 062653 062659 062683 062687 062701
062723 062731 062743 062753 062761 062773 062791 062801
062819 062827 062851 062861 062869 062873 062897 062903
062921 062927 062929 062939 062969 062971 062981 062983
062987 062989 063029 063031 063059 063067 063073 063079
063097 063103 063113 063127 063131 063149 063179 063197
063199 063211 063241 063247 063277 063281 063299 063311
063313 063317 063331 063337 063347 063353 063361 063367
063377 063389 063391 063397 063409 063419 063421 063439
063443 063463 063467 063473 063487 063493 063499 063521
063527 063533 063541 063559 063577 063587 063589 063599
063601 063607 063611 063617 063629 063647 063649 063659
063667 063671 063689 063691 063697 063703 063709 063719
063727 063737 063743 063761 063773 063781 063793 063799
063803 063809 063823 063839 063841 063853 063857 063863

063901 063907 063913 063929 063949 063977 063997 064007
064013 064019 064033 064037 064063 064067 064081 064091
064109 064123 064151 064153 064157 064171 064187 064189
064217 064223 064231 064237 064271 064279 064283 064301
064303 064319 064327 064333 064373 064381 064399 064403
064433 064439 064451 064453 064483 064489 064499 064513
064553 064567 064577 064579 064591 064601 064609 064613
064621 064627 064633 064661 064663 064667 064679 064693
064709 064717 064747 064763 064781 064783 064793 064811
064817 064849 064853 064871 064877 064879 064891 064901
064919 064921 064927 064937 064951 064969 064997 065003
065011 065027 065029 065033 065053 065063 065071 065089
065099 065101 065111 065119 065123 065129 065141 065147
065167 065171 065173 065179 065183 065203 065213 065239
065257 065267 065269 065287 065293 065309 065323 065327
065353 065357 065371 065381 065393 065407 065413 065419
065423 065437 065447 065449 065479 065497 065519 065521
065537 065539 065543 065551 065557 065563 065579 065581
065587 065599 065609 065617 065629 065633 065647 065651
065657 065677 065687 065699 065701 065707 065713 065717
065719 065729 065731 065761 065777 065789 065809 065827
065831 065837 065839 065843 065851 065867 065881 065899
065921 065927 065929 065951 065957 065963 065981 065983
065993 066029 066037 066041 066047 066067 066071 066083
066089 066103 066107 066109 066137 066161 066169 066173
066179 066191 066221 066239 066271 066293 066301 066337
066343 066347 066359 066361 066373 066377 066383 066403
066413 066431 066449 066457 066463 066467 066491 066499
066509 066523 066529 066533 066541 066553 066569 066571
066587 066593 066601 066617 066629 066643 066653 066683
066697 066701 066713 066721 066733 066739 066749 066751

066763	066791	066797	066809	066821	066841	066851	066853
066863	066877	066883	066889	066919	066923	066931	066943
066947	066949	066959	066973	066977	067003	067021	067033
067043	067049	067057	067061	067073	067079	067103	067121
067129	067139	067141	067153	067157	067169	067181	067187
067189	067211	067213	067217	067219	067231	067247	067261
067271	067273	067289	067307	067339	067343	067349	067369
067391	067399	067409	067411	067421	067427	067429	067433
067447	067453	067477	067481	067489	067493	067499	067511
067523	067531	067537	067547	067559	067567	067577	067579
067589	067601	067607	067619	067631	067651	067679	067699
067709	067723	067733	067741	067751	067757	067759	067763
067777	067783	067789	067801	067807	067819	067829	067843
067853	067867	067883	067891	067901	067927	067931	067933
067939	067943	067957	067961	067967	067979	067987	067993
068023	068041	068053	068059	068071	068087	068099	068111
068113	068141	068147	068161	068171	068207	068209	068213
068219	068227	068239	068261	068279	068281	068311	068329
068351	068371	068389	068399	068437	068443	068447	068449
068473	068477	068483	068489	068491	068501	068507	068521
068531	068539	068543	068567	068581	068597	068611	068633
068639	068659	068669	068683	068687	068699	068711	068713
068729	068737	068743	068749	068767	068771	068777	068791
068813	068819	068821	068863	068879	068881	068891	068897
068899	068903	068909	068917	068927	068947	068963	068993
069001	069011	069019	069029	069031	069061	069067	069073
069109	069119	069127	069143	069149	069151	069163	069191
069193	069197	069203	069221	069233	069239	069247	069257
069259	069263	069313	069317	069337	069341	069371	069379
069383	069389	069401	069403	069427	069431	069439	069457
069463	069467	069473	069481	069491	069493	069497	069499

069539 069557 069593 069623 069653 069661 069677 069691
069697 069709 069737 069739 069761 069763 069767 069779
069809 069821 069827 069829 069833 069847 069857 069859
069877 069899 069911 069929 069931 069941 069959 069991
069997 070001 070003 070009 070019 070039 070051 070061
070067 070079 070099 070111 070117 070121 070123 070139
070141 070157 070163 070177 070181 070183 070199 070201
070207 070223 070229 070237 070241 070249 070271 070289
070297 070309 070313 070321 070327 070351 070373 070379
070381 070393 070423 070429 070439 070451 070457 070459
070481 070487 070489 070501 070507 070529 070537 070549
070571 070573 070583 070589 070607 070619 070621 070627
070639 070657 070663 070667 070687 070709 070717 070729
070753 070769 070783 070793 070823 070841 070843 070849
070853 070867 070877 070879 070891 070901 070913 070919
070921 070937 070949 070951 070957 070969 070979 070981
070991 070997 070999 071011 071023 071039 071059 071069
071081 071089 071119 071129 071143 071147 071153 071161
071167 071171 071191 071209 071233 071237 071249 071257
071261 071263 071287 071293 071317 071327 071329 071333
071339 071341 071347 071353 071359 071363 071387 071389
071399 071411 071413 071419 071429 071437 071443 071453
071471 071473 071479 071483 071503 071527 071537 071549
071551 071563 071569 071593 071597 071633 071647 071663
071671 071693 071699 071707 071711 071713 071719 071741
071761 071777 071789 071807 071809 071821 071837 071843
071849 071861 071867 071879 071881 071887 071899 071909
071917 071933 071941 071947 071963 071971 071983 071987
071993 071999 072019 072031 072043 072047 072053 072073
072077 072089 072091 072101 072103 072109 072139 072161
072167 072169 072173 072211 072221 072223 072227 072229

072251 072253 072269 072271 072277 072287 072307 072313
072337 072341 072353 072367 072379 072383 072421 072431
072461 072467 072469 072481 072493 072497 072503 072533
072547 072551 072559 072577 072613 072617 072623 072643
072647 072649 072661 072671 072673 072679 072689 072701
072707 072719 072727 072733 072739 072763 072767 072797
072817 072823 072859 072869 072871 072883 072889 072893
072901 072907 072911 072923 072931 072937 072949 072953
072959 072973 072977 072997 073009 073013 073019 073037
073039 073043 073061 073063 073079 073091 073121 073127
073133 073141 073181 073189 073237 073243 073259 073277
073291 073303 073309 073327 073331 073351 073361 073363
073369 073379 073387 073417 073421 073433 073453 073459
073471 073477 073483 073517 073523 073529 073547 073553
073561 073571 073583 073589 073597 073607 073609 073613
073637 073643 073651 073673 073679 073681 073693 073699
073709 073721 073727 073751 073757 073771 073783 073819
073823 073847 073849 073859 073867 073877 073883 073897
073907 073939 073943 073951 073961 073973 073999 074017
074021 074027 074047 074051 074071 074077 074093 074099
074101 074131 074143 074149 074159 074161 074167 074177
074189 074197 074201 074203 074209 074219 074231 074257
074279 074287 074293 074297 074311 074317 074323 074353
074357 074363 074377 074381 074383 074411 074413 074419
074441 074449 074453 074471 074489 074507 074509 074521
074527 074531 074551 074561 074567 074573 074587 074597
074609 074611 074623 074653 074687 074699 074707 074713
074717 074719 074729 074731 074747 074759 074761 074771
074779 074797 074821 074827 074831 074843 074857 074861
074869 074873 074887 074891 074897 074903 074923 074929
074933 074941 074959 075011 075013 075017 075029 075037

075041 075079 075083 075109 075133 075149 075161 075167
075169 075181 075193 075209 075211 075217 075223 075227
075239 075253 075269 075277 075289 075307 075323 075329
075337 075347 075353 075367 075377 075389 075391 075401
075403 075407 075431 075437 075479 075503 075511 075521
075527 075533 075539 075541 075553 075557 075571 075577
075583 075611 075617 075619 075629 075641 075653 075659
075679 075683 075689 075703 075707 075709 075721 075731
075743 075767 075773 075781 075787 075793 075797 075821
075833 075853 075869 075883 075913 075931 075937 075941
075967 075979 075983 075989 075991 075997 076001 076003
076031 076039 076079 076081 076091 076099 076103 076123
076129 076147 076157 076159 076163 076207 076213 076231
076243 076249 076253 076259 076261 076283 076289 076303
076333 076343 076367 076369 076379 076387 076403 076421
076423 076441 076463 076471 076481 076487 076493 076507
076511 076519 076537 076541 076543 076561 076579 076597
076603 076607 076631 076649 076651 076667 076673 076679
076697 076717 076733 076753 076757 076771 076777 076781
076801 076819 076829 076831 076837 076847 076871 076873
076883 076907 076913 076919 076943 076949 076961 076963
076991 077003 077017 077023 077029 077041 077047 077069
077081 077093 077101 077137 077141 077153 077167 077171
077191 077201 077213 077237 077239 077243 077249 077261
077263 077267 077269 077279 077291 077317 077323 077339
077347 077351 077359 077369 077377 077383 077417 077419
077431 077447 077471 077477 077479 077489 077491 077509
077513 077521 077527 077543 077549 077551 077557 077563
077569 077573 077587 077591 077611 077617 077621 077641
077647 077659 077681 077687 077689 077699 077711 077713
077719 077723 077731 077743 077747 077761 077773 077783

077797	077801	077813	077839	077849	077863	077867	077893
077899	077929	077933	077951	077969	077977	077983	077999
078007	078017	078031	078041	078049	078059	078079	078101
078121	078137	078139	078157	078163	078167	078173	078179
078191	078193	078203	078229	078233	078241	078259	078277
078283	078301	078307	078311	078317	078341	078347	078367
078401	078427	078437	078439	078467	078479	078487	078497
078509	078511	078517	078539	078541	078553	078569	078571
078577	078583	078593	078607	078623	078643	078649	078653
078691	078697	078707	078713	078721	078737	078779	078781
078787	078791	078797	078803	078809	078823	078839	078853
078857	078877	078887	078889	078893	078901	078919	078929
078941	078977	078979	078989	079031	079039	079043	079063
079087	079103	079111	079133	079139	079147	079151	079153
079159	079181	079187	079193	079201	079229	079231	079241
079259	079273	079279	079283	079301	079309	079319	079333
079337	079349	079357	079367	079379	079393	079397	079399
079411	079423	079427	079433	079451	079481	079493	079531
079537	079549	079559	079561	079579	079589	079601	079609
079613	079621	079627	079631	079633	079657	079669	079687
079691	079693	079697	079699	079757	079769	079777	079801
079811	079813	079817	079823	079829	079841	079843	079847
079861	079867	079873	079889	079901	079903	079907	079939
079943	079967	079973	079979	079987	079997	079999	080021
080039	080051	080071	080077	080107	080111	080141	080147
080149	080153	080167	080173	080177	080191	080207	080209
080221	080231	080233	080239	080251	080263	080273	080279
080287	080309	080317	080329	080341	080347	080363	080369
080387	080407	080429	080447	080449	080471	080473	080489
080491	080513	080527	080537	080557	080567	080599	080603
080611	080621	080627	080629	080651	080657	080669	080671

080677 080681 080683 080687 080701 080713 080737 080747
080749 080761 080777 080779 080783 080789 080803 080809
080819 080831 080833 080849 080863 080897 080909 080911
080917 080923 080929 080933 080953 080963 080989 081001
081013 081017 081019 081023 081031 081041 081043 081047
081049 081071 081077 081083 081097 081101 081119 081131
081157 081163 081173 081181 081197 081199 081203 081223
081233 081239 081281 081283 081293 081299 081307 081331
081343 081349 081353 081359 081371 081373 081401 081409
081421 081439 081457 081463 081509 081517 081527 081533
081547 081551 081553 081559 081563 081569 081611 081619
081629 081637 081647 081649 081667 081671 081677 081689
081701 081703 081707 081727 081737 081749 081761 081769
081773 081799 081817 081839 081847 081853 081869 081883
081899 081901 081919 081929 081931 081937 081943 081953
081967 081971 081973 082003 082007 082009 082013 082021
082031 082037 082039 082051 082067 082073 082129 082139
082141 082153 082163 082171 082183 082189 082193 082207
082217 082219 082223 082231 082237 082241 082261 082267
082279 082301 082307 082339 082349 082351 082361 082373
082387 082393 082421 082457 082463 082469 082471 082483
082487 082493 082499 082507 082529 082531 082549 082559
082561 082567 082571 082591 082601 082609 082613 082619
082633 082651 082657 082699 082721 082723 082727 082729
082757 082759 082763 082781 082787 082793 082799 082811
082813 082837 082847 082883 082889 082891 082903 082913
082939 082963 082981 082997 083003 083009 083023 083047
083059 083063 083071 083077 083089 083093 083101 083117
083137 083177 083203 083207 083219 083221 083227 083231
083233 083243 083257 083267 083269 083273 083299 083311
083339 083341 083357 083383 083389 083399 083401 083407

083417 083423 083431 083437 083443 083449 083459 083471
083477 083497 083537 083557 083561 083563 083579 083591
083597 083609 083617 083621 083639 083641 083653 083663
083689 083701 083717 083719 083737 083761 083773 083777
083791 083813 083833 083843 083857 083869 083873 083891
083903 083911 083921 083933 083939 083969 083983 083987
084011 084017 084047 084053 084059 084061 084067 084089
084121 084127 084131 084137 084143 084163 084179 084181
084191 084199 084211 084221 084223 084229 084239 084247
084263 084299 084307 084313 084317 084319 084347 084349
084377 084389 084391 084401 084407 084421 084431 084437
084443 084449 084457 084463 084467 084481 084499 084503
084509 084521 084523 084533 084551 084559 084589 084629
084631 084649 084653 084659 084673 084691 084697 084701
084713 084719 084731 084737 084751 084761 084787 084793
084809 084811 084827 084857 084859 084869 084871 084913
084919 084947 084961 084967 084977 084979 084991 085009
085021 085027 085037 085049 085061 085081 085087 085091
085093 085103 085109 085121 085133 085147 085159 085193
085199 085201 085213 085223 085229 085237 085243 085247
085259 085297 085303 085313 085331 085333 085361 085363
085369 085381 085411 085427 085429 085439 085447 085451
085453 085469 085487 085513 085517 085523 085531 085549
085571 085577 085597 085601 085607 085619 085621 085627
085639 085643 085661 085667 085669 085691 085703 085711
085717 085733 085751 085781 085793 085817 085819 085829
085831 085837 085843 085847 085853 085889 085903 085909
085931 085933 085991 085999 086011 086017 086027 086029
086069 086077 086083 086111 086113 086117 086131 086137
086143 086161 086171 086179 086183 086197 086201 086209
086239 086243 086249 086257 086263 086269 086287 086291

086293 086297 086311 086323 086341 086351 086353 086357
086369 086371 086381 086389 086399 086413 086423 086441
086453 086461 086467 086477 086491 086501 086509 086531
086533 086539 086561 086573 086579 086587 086599 086627
086629 086677 086689 086693 086711 086719 086729 086743
086753 086767 086771 086783 086813 086837 086843 086851
086857 086861 086869 086923 086927 086929 086939 086951
086959 086969 086981 086993 087011 087013 087037 087041
087049 087071 087083 087103 087107 087119 087121 087133
087149 087151 087179 087181 087187 087211 087221 087223
087251 087253 087257 087277 087281 087293 087299 087313
087317 087323 087337 087359 087383 087403 087407 087421
087427 087433 087443 087473 087481 087491 087509 087511
087517 087523 087539 087541 087547 087553 087557 087559
087583 087587 087589 087613 087623 087629 087631 087641
087643 087649 087671 087679 087683 087691 087697 087701
087719 087721 087739 087743 087751 087767 087793 087797
087803 087811 087833 087853 087869 087877 087881 087887
087911 087917 087931 087943 087959 087961 087973 087977
087991 088001 088003 088007 088019 088037 088069 088079
088093 088117 088129 088169 088177 088211 088223 088237
088241 088259 088261 088289 088301 088321 088327 088337
088339 088379 088397 088411 088423 088427 088463 088469
088471 088493 088499 088513 088523 088547 088589 088591
088607 088609 088643 088651 088657 088661 088663 088667
088681 088721 088729 088741 088747 088771 088789 088793
088799 088801 088807 088811 088813 088817 088819 088843
088853 088861 088867 088873 088883 088897 088903 088919
088937 088951 088969 088993 088997 089003 089009 089017
089021 089041 089051 089057 089069 089071 089083 089087
089101 089107 089113 089119 089123 089137 089153 089189

089203 089209 089213 089227 089231 089237 089261 089269
089273 089293 089303 089317 089329 089363 089371 089381
089387 089393 089399 089413 089417 089431 089443 089449
089459 089477 089491 089501 089513 089519 089521 089527
089533 089561 089563 089567 089591 089597 089599 089603
089611 089627 089633 089653 089657 089659 089669 089671
089681 089689 089753 089759 089767 089779 089783 089797
089809 089819 089821 089833 089839 089849 089867 089891
089897 089899 089909 089917 089923 089939 089959 089963
089977 089983 089989 090001 090007 090011 090017 090019
090023 090031 090053 090059 090067 090071 090073 090089
090107 090121 090127 090149 090163 090173 090187 090191
090197 090199 090203 090217 090227 090239 090247 090263
090271 090281 090289 090313 090353 090359 090371 090373
090379 090397 090401 090403 090407 090437 090439 090469
090473 090481 090499 090511 090523 090527 090529 090533
090547 090583 090599 090617 090619 090631 090641 090647
090659 090677 090679 090697 090703 090709 090731 090749
090787 090793 090803 090821 090823 090833 090841 090847
090863 090887 090901 090907 090911 090917 090931 090947
090971 090977 090989 090997 091009 091019 091033 091079
091081 091097 091099 091121 091127 091129 091139 091141
091151 091153 091159 091163 091183 091193 091199 091229
091237 091243 091249 091253 091283 091291 091297 091303
091309 091331 091367 091369 091373 091381 091387 091393
091397 091411 091423 091433 091453 091457 091459 091463
091493 091499 091513 091529 091541 091571 091573 091577
091583 091591 091621 091631 091639 091673 091691 091703
091711 091733 091753 091757 091771 091781 091801 091807
091811 091813 091823 091837 091841 091867 091873 091909
091921 091939 091943 091951 091957 091961 091967 091969

091997 092003 092009 092033 092041 092051 092077 092083
092107 092111 092119 092143 092153 092173 092177 092179
092189 092203 092219 092221 092227 092233 092237 092243
092251 092269 092297 092311 092317 092333 092347 092353
092357 092363 092369 092377 092381 092383 092387 092399
092401 092413 092419 092431 092459 092461 092467 092479
092489 092503 092507 092551 092557 092567 092569 092581
092593 092623 092627 092639 092641 092647 092657 092669
092671 092681 092683 092693 092699 092707 092717 092723
092737 092753 092761 092767 092779 092789 092791 092801
092809 092821 092831 092849 092857 092861 092863 092867
092893 092899 092921 092927 092941 092951 092957 092959
092987 092993 093001 093047 093053 093059 093077 093083
093089 093097 093103 093113 093131 093133 093139 093151
093169 093179 093187 093199 093229 093239 093241 093251
093253 093257 093263 093281 093283 093287 093307 093319
093323 093329 093337 093371 093377 093383 093407 093419
093427 093463 093479 093481 093487 093491 093493 093497
093503 093523 093529 093553 093557 093559 093563 093581
093601 093607 093629 093637 093683 093701 093703 093719
093739 093761 093763 093787 093809 093811 093827 093851
093871 093887 093889 093893 093901 093911 093913 093923
093937 093941 093949 093967 093971 093979 093983 093997
094007 094009 094033 094049 094057 094063 094079 094099
094109 094111 094117 094121 094151 094153 094169 094201
094207 094219 094229 094253 094261 094273 094291 094307
094309 094321 094327 094331 094343 094349 094351 094379
094397 094399 094421 094427 094433 094439 094441 094447
094463 094477 094483 094513 094529 094531 094541 094543
094547 094559 094561 094573 094583 094597 094603 094613
094621 094649 094651 094687 094693 094709 094723 094727

094747	094771	094777	094781	094789	094793	094811	094819
094823	094837	094841	094847	094849	094873	094889	094903
094907	094933	094949	094951	094961	094993	094999	095003
095009	095021	095027	095063	095071	095083	095087	095089
095093	095101	095107	095111	095131	095143	095153	095177
095189	095191	095203	095213	095219	095231	095233	095239
095257	095261	095267	095273	095279	095287	095311	095317
095327	095339	095369	095383	095393	095401	095413	095419
095429	095441	095443	095461	095467	095471	095479	095483
095507	095527	095531	095539	095549	095561	095569	095581
095597	095603	095617	095621	095629	095633	095651	095701
095707	095713	095717	095723	095731	095737	095747	095773
095783	095789	095791	095801	095803	095813	095819	095857
095869	095873	095881	095891	095911	095917	095923	095929
095947	095957	095959	095971	095987	095989	096001	096013
096017	096043	096053	096059	096079	096097	096137	096149
096157	096167	096179	096181	096199	096211	096221	096223
096233	096259	096263	096269	096281	096289	096293	096323
096329	096331	096337	096353	096377	096401	096419	096431
096443	096451	096457	096461	096469	096479	096487	096493
096497	096517	096527	096553	096557	096581	096587	096589
096601	096643	096661	096667	096671	096697	096703	096731
096737	096739	096749	096757	096763	096769	096779	096787
096797	096799	096821	096823	096827	096847	096851	096857
096893	096907	096911	096931	096953	096959	096973	096979
096989	096997	097001	097003	097007	097021	097039	097073
097081	097103	097117	097127	097151	097157	097159	097169
097171	097177	097187	097213	097231	097241	097259	097283
097301	097303	097327	097367	097369	097373	097379	097381
097387	097397	097423	097429	097441	097453	097459	097463
097499	097501	097511	097523	097547	097549	097553	097561

097571 097577 097579 097583 097607 097609 097613 097649
097651 097673 097687 097711 097729 097771 097777 097787
097789 097813 097829 097841 097843 097847 097849 097859
097861 097871 097879 097883 097919 097927 097931 097943
097961 097967 097973 097987 098009 098011 098017 098041
098047 098057 098081 098101 098123 098129 098143 098179
098207 098213 098221 098227 098251 098257 098269 098297
098299 098317 098321 098323 098327 098347 098369 098377
098387 098389 098407 098411 098419 098429 098443 098453
098459 098467 098473 098479 098491 098507 098519 098533
098543 098561 098563 098573 098597 098621 098627 098639
098641 098663 098669 098689 098711 098713 098717 098729
098731 098737 098773 098779 098801 098807 098809 098837
098849 098867 098869 098873 098887 098893 098897 098899
098909 098911 098927 098929 098939 098947 098953 098963
098981 098993 098999 099013 099017 099023 099041 099053
099079 099083 099089 099103 099109 099119 099131 099133
099137 099139 099149 099173 099181 099191 099223 099233
099241 099251 099257 099259 099277 099289 099317 099347
099349 099367 099371 099377 099391 099397 099401 099409
099431 099439 099469 099487 099497 099523 099527 099529
099551 099559 099563 099571 099577 099581 099607 099611
099623 099643 099661 099667 099679 099689 099707 099709
099713 099719 099721 099733 099761 099767 099787 099793
099809 099817 099823 099829 099833 099839 099859 099871
099877 099881 099901 099907 099923 099929 099961 099971
099989 099991 100003 100019 100043 100049 100057 100069
100103 100109 100129 100151 100153 100169 100183 100189
100193 100207 100213 100237 100267 100271 100279 100291
100297 100313 100333 100343 100357 100361 100363 100379
100391 100393 100403 100411 100417 100447 100459 100469

100483	100493	100501	100511	100517	100519	100523	100537
100547	100549	100559	100591	100609	100613	100621	100649
100669	100673	100693	100699	100703	100733	100741	100747
100769	100787	100799	100801	100811	100823	100829	100847
100853	100907	100913	100927	100931	100937	100943	100957
100981	100987	100999	101009	101021	101027	101051	101063
101081	101089	101107	101111	101113	101117	101119	101141
101149	101159	101161	101173	101183	101197	101203	101207
101209	101221	101267	101273	101279	101281	101287	101293
101323	101333	101341	101347	101359	101363	101377	101383
101399	101411	101419	101429	101449	101467	101477	101483
101489	101501	101503	101513	101527	101531	101533	101537
101561	101573	101581	101599	101603	101611	101627	101641
101653	101663	101681	101693	101701	101719	101723	101737
101741	101747	101749	101771	101789	101797	101807	101833
101837	101839	101863	101869	101873	101879	101891	101917
101921	101929	101939	101957	101963	101977	101987	101999
102001	102013	102019	102023	102031	102043	102059	102061
102071	102077	102079	102101	102103	102107	102121	102139
102149	102161	102181	102191	102197	102199	102203	102217
102229	102233	102241	102251	102253	102259	102293	102299
102301	102317	102329	102337	102359	102367	102397	102407
102409	102433	102437	102451	102461	102481	102497	102499
102503	102523	102533	102539	102547	102551	102559	102563
102587	102593	102607	102611	102643	102647	102653	102667
102673	102677	102679	102701	102761	102763	102769	102793
102797	102811	102829	102841	102859	102871	102877	102881
102911	102913	102929	102931	102953	102967	102983	103001
103007	103043	103049	103067	103069	103079	103087	103091
103093	103099	103123	103141	103171	103177	103183	103217
103231	103237	103289	103291	103307	103319	103333	103349

103357 103387 103391 103393 103399 103409 103421 103423
103451 103457 103471 103483 103511 103529 103549 103553
103561 103567 103573 103577 103583 103591 103613 103619
103643 103651 103657 103669 103681 103687 103699 103703
103723 103769 103787 103801 103811 103813 103837 103841
103843 103867 103889 103903 103913 103919 103951 103963
103967 103969 103979 103981 103991 103993 103997 104003
104009 104021 104033 104047 104053 104059 104087 104089
104107 104113 104119 104123 104147 104149 104161 104173
104179 104183 104207 104231 104233 104239 104243 104281
104287 104297 104309 104311 104323 104327 104347 104369
104381 104383 104393 104399 104417 104459 104471 104473
104479 104491 104513 104527 104537 104543 104549 104551
104561 104579 104593 104597 104623 104639 104651 104659
104677 104681 104683 104693 104701 104707 104711 104717
104723 104729 104743 104759 104761 104773 104779 104789
104801 104803 104827 104831 104849 104851 104869 104879
104891 104911 104917 104933 104947 104953 104959 104971
104987 104999 105019 105023 105031 105037 105071 105097
105107 105137 105143 105167 105173 105199 105211 105227
105229 105239 105251 105253 105263 105269 105277 105319
105323 105331 105337 105341 105359 105361 105367 105373
105379 105389 105397 105401 105407 105437 105449 105467
105491 105499 105503 105509 105517 105527 105529 105533
105541 105557 105563 105601 105607 105613 105619 105649
105653 105667 105673 105683 105691 105701 105727 105733
105751 105761 105767 105769 105817 105829 105863 105871
105883 105899 105907 105913 105929 105943 105953 105967
105971 105977 105983 105997 106013 106019 106031 106033
106087 106103 106109 106121 106123 106129 106163 106181
106187 106189 106207 106213 106217 106219 106243 106261

106273	106277	106279	106291	106297	106303	106307	106319
106321	106331	106349	106357	106363	106367	106373	106391
106397	106411	106417	106427	106433	106441	106451	106453
106487	106501	106531	106537	106541	106543	106591	106619
106621	106627	106637	106649	106657	106661	106663	106669
106681	106693	106699	106703	106721	106727	106739	106747
106751	106753	106759	106781	106783	106787	106801	106823
106853	106859	106861	106867	106871	106877	106903	106907
106921	106937	106949	106957	106961	106963	106979	106993
107021	107033	107053	107057	107069	107071	107077	107089
107099	107101	107119	107123	107137	107171	107183	107197
107201	107209	107227	107243	107251	107269	107273	107279
107309	107323	107339	107347	107351	107357	107377	107441
107449	107453	107467	107473	107507	107509	107563	107581
107599	107603	107609	107621	107641	107647	107671	107687
107693	107699	107713	107717	107719	107741	107747	107761
107773	107777	107791	107827	107837	107839	107843	107857
107867	107873	107881	107897	107903	107923	107927	107941
107951	107971	107981	107999	108007	108011	108013	108023
108037	108041	108061	108079	108089	108107	108109	108127
108131	108139	108161	108179	108187	108191	108193	108203
108211	108217	108223	108233	108247	108263	108271	108287
108289	108293	108301	108343	108347	108359	108377	108379
108401	108413	108421	108439	108457	108461	108463	108497
108499	108503	108517	108529	108533	108541	108553	108557
108571	108587	108631	108637	108643	108649	108677	108707
108709	108727	108739	108751	108761	108769	108791	108793
108799	108803	108821	108827	108863	108869	108877	108881
108883	108887	108893	108907	108917	108923	108929	108943
108947	108949	108959	108961	108967	108971	108991	109001
109013	109037	109049	109063	109073	109097	109103	109111

109121	109133	109139	109141	109147	109159	109169	109171
109199	109201	109211	109229	109253	109267	109279	109297
109303	109313	109321	109331	109357	109363	109367	109379
109387	109391	109397	109423	109433	109441	109451	109453
109469	109471	109481	109507	109517	109519	109537	109541
109547	109567	109579	109583	109589	109597	109609	109619
109621	109639	109661	109663	109673	109717	109721	109741
109751	109789	109793	109807	109819	109829	109831	109841
109843	109847	109849	109859	109873	109883	109891	109897
109903	109913	109919	109937	109943	109961	109987	110017
110023	110039	110051	110059	110063	110069	110083	110119
110129	110161	110183	110221	110233	110237	110251	110261
110269	110273	110281	110291	110311	110321	110323	110339
110359	110419	110431	110437	110441	110459	110477	110479
110491	110501	110503	110527	110533	110543	110557	110563
110567	110569	110573	110581	110587	110597	110603	110609
110623	110629	110641	110647	110651	110681	110711	110729
110731	110749	110753	110771	110777	110807	110813	110819
110821	110849	110863	110879	110881	110899	110909	110917
110921	110923	110927	110933	110939	110947	110951	110969
110977	110989	111029	111031	111043	111049	111053	111091
111103	111109	111119	111121	111127	111143	111149	111187
111191	111211	111217	111227	111229	111253	111263	111269
111271	111301	111317	111323	111337	111341	111347	111373
111409	111427	111431	111439	111443	111467	111487	111491
111493	111497	111509	111521	111533	111539	111577	111581
111593	111599	111611	111623	111637	111641	111653	111659
111667	111697	111721	111731	111733	111751	111767	111773
111779	111781	111791	111799	111821	111827	111829	111833
111847	111857	111863	111869	111871	111893	111913	111919
111949	111953	111959	111973	111977	111997	112019	112031

112061	112067	112069	112087	112097	112103	112111	112121
112129	112139	112153	112163	112181	112199	112207	112213
112223	112237	112241	112247	112249	112253	112261	112279
112289	112291	112297	112303	112327	112331	112337	112339
112349	112361	112363	112397	112403	112429	112459	112481
112501	112507	112543	112559	112571	112573	112577	112583
112589	112601	112603	112621	112643	112657	112663	112687
112691	112741	112757	112759	112771	112787	112799	112807
112831	112843	112859	112877	112901	112909	112913	112919
112921	112927	112939	112951	112967	112979	112997	113011
113017	113021	113023	113027	113039	113041	113051	113063
113081	113083	113089	113093	113111	113117	113123	113131
113143	113147	113149	113153	113159	113161	113167	113171
113173	113177	113189	113209	113213	113227	113233	113279
113287	113327	113329	113341	113357	113359	113363	113371
113381	113383	113417	113437	113453	113467	113489	113497
113501	113513	113537	113539	113557	113567	113591	113621
113623	113647	113657	113683	113717	113719	113723	113731
113749	113759	113761	113777	113779	113783	113797	113809
113819	113837	113843	113891	113899	113903	113909	113921
113933	113947	113957	113963	113969	113983	113989	114001
114013	114031	114041	114043	114067	114073	114077	114083
114089	114113	114143	114157	114161	114167	114193	114197
114199	114203	114217	114221	114229	114259	114269	114277
114281	114299	114311	114319	114329	114343	114371	114377
114407	114419	114451	114467	114473	114479	114487	114493
114547	114553	114571	114577	114593	114599	114601	114613
114617	114641	114643	114649	114659	114661	114671	114679
114689	114691	114713	114743	114749	114757	114761	114769
114773	114781	114797	114799	114809	114827	114833	114847
114859	114883	114889	114901	114913	114941	114967	114973

114997	115001	115013	115019	115021	115057	115061	115067
115079	115099	115117	115123	115127	115133	115151	115153
115163	115183	115201	115211	115223	115237	115249	115259
115279	115301	115303	115309	115319	115321	115327	115331
115337	115343	115361	115363	115399	115421	115429	115459
115469	115471	115499	115513	115523	115547	115553	115561
115571	115589	115597	115601	115603	115613	115631	115637
115657	115663	115679	115693	115727	115733	115741	115751
115757	115763	115769	115771	115777	115781	115783	115793
115807	115811	115823	115831	115837	115849	115853	115859
115861	115873	115877	115879	115883	115891	115901	115903
115931	115933	115963	115979	115981	115987	116009	116027
116041	116047	116089	116099	116101	116107	116113	116131
116141	116159	116167	116177	116189	116191	116201	116239
116243	116257	116269	116273	116279	116293	116329	116341
116351	116359	116371	116381	116387	116411	116423	116437
116443	116447	116461	116471	116483	116491	116507	116531
116533	116537	116539	116549	116579	116593	116639	116657
116663	116681	116687	116689	116707	116719	116731	116741
116747	116789	116791	116797	116803	116819	116827	116833
116849	116867	116881	116903	116911	116923	116927	116929
116933	116953	116959	116969	116981	116989	116993	117017
117023	117037	117041	117043	117053	117071	117101	117109
117119	117127	117133	117163	117167	117191	117193	117203
117209	117223	117239	117241	117251	117259	117269	117281
117307	117319	117329	117331	117353	117361	117371	117373
117389	117413	117427	117431	117437	117443	117497	117499
117503	117511	117517	117529	117539	117541	117563	117571
117577	117617	117619	117643	117659	117671	117673	117679
117701	117703	117709	117721	117727	117731	117751	117757
117763	117773	117779	117787	117797	117809	117811	117833

117839	117841	117851	117877	117881	117883	117889	117899
117911	117917	117937	117959	117973	117977	117979	117989
117991	118033	118037	118043	118051	118057	118061	118081
118093	118127	118147	118163	118169	118171	118189	118211
118213	118219	118247	118249	118253	118259	118273	118277
118297	118343	118361	118369	118373	118387	118399	118409
118411	118423	118429	118453	118457	118463	118471	118493
118529	118543	118549	118571	118583	118589	118603	118619
118621	118633	118661	118669	118673	118681	118687	118691
118709	118717	118739	118747	118751	118757	118787	118799
118801	118819	118831	118843	118861	118873	118891	118897
118901	118903	118907	118913	118927	118931	118967	118973
119027	119033	119039	119047	119057	119069	119083	119087
119089	119099	119101	119107	119129	119131	119159	119173
119179	119183	119191	119227	119233	119237	119243	119267
119291	119293	119297	119299	119311	119321	119359	119363
119389	119417	119419	119429	119447	119489	119503	119513
119533	119549	119551	119557	119563	119569	119591	119611
119617	119627	119633	119653	119657	119659	119671	119677
119687	119689	119699	119701	119723	119737	119747	119759
119771	119773	119783	119797	119809	119813	119827	119831
119839	119849	119851	119869	119881	119891	119921	119923
119929	119953	119963	119971	119981	119983	119993	120011
120017	120041	120047	120049	120067	120077	120079	120091
120097	120103	120121	120157	120163	120167	120181	120193
120199	120209	120223	120233	120247	120277	120283	120293
120299	120319	120331	120349	120371	120383	120391	120397
120401	120413	120427	120431	120473	120503	120511	120539
120551	120557	120563	120569	120577	120587	120607	120619
120623	120641	120647	120661	120671	120677	120689	120691
120709	120713	120721	120737	120739	120749	120763	120767

120779	120811	120817	120823	120829	120833	120847	120851
120863	120871	120877	120889	120899	120907	120917	120919
120929	120937	120941	120943	120947	120977	120997	121001
121007	121013	121019	121021	121039	121061	121063	121067
121081	121123	121139	121151	121157	121169	121171	121181
121189	121229	121259	121267	121271	121283	121291	121309
121313	121321	121327	121333	121343	121349	121351	121357
121367	121369	121379	121403	121421	121439	121441	121447
121453	121469	121487	121493	121501	121507	121523	121531
121547	121553	121559	121571	121577	121579	121591	121607
121609	121621	121631	121633	121637	121661	121687	121697
121711	121721	121727	121763	121787	121789	121843	121853
121867	121883	121889	121909	121921	121931	121937	121949
121951	121963	121967	121993	121997	122011	122021	122027
122029	122033	122039	122041	122051	122053	122069	122081
122099	122117	122131	122147	122149	122167	122173	122201
122203	122207	122209	122219	122231	122251	122263	122267
122273	122279	122299	122321	122323	122327	122347	122363
122387	122389	122393	122399	122401	122443	122449	122453
122471	122477	122489	122497	122501	122503	122509	122527
122533	122557	122561	122579	122597	122599	122609	122611
122651	122653	122663	122693	122701	122719	122741	122743
122753	122761	122777	122789	122819	122827	122833	122839
122849	122861	122867	122869	122887	122891	122921	122929
122939	122953	122957	122963	122971	123001	123007	123017
123031	123049	123059	123077	123083	123091	123113	123121
123127	123143	123169	123191	123203	123209	123217	123229
123239	123259	123269	123289	123307	123311	123323	123341
123373	123377	123379	123397	123401	123407	123419	123427
123433	123439	123449	123457	123479	123491	123493	123499
123503	123517	123527	123547	123551	123553	123581	123583

123593	123601	123619	123631	123637	123653	123661	123667
123677	123701	123707	123719	123727	123731	123733	123737
123757	123787	123791	123803	123817	123821	123829	123833
123853	123863	123887	123911	123923	123931	123941	123953
123973	123979	123983	123989	123997	124001	124021	124067
124087	124097	124121	124123	124133	124139	124147	124153
124171	124181	124183	124193	124199	124213	124231	124247
124249	124277	124291	124297	124301	124303	124309	124337
124339	124343	124349	124351	124363	124367	124427	124429
124433	124447	124459	124471	124477	124489	124493	124513
124529	124541	124543	124561	124567	124577	124601	124633
124643	124669	124673	124679	124693	124699	124703	124717
124721	124739	124753	124759	124769	124771	124777	124781
124783	124793	124799	124819	124823	124847	124853	124897
124907	124909	124919	124951	124979	124981	124987	124991
125003	125017	125029	125053	125063	125093	125101	125107
125113	125117	125119	125131	125141	125149	125183	125197
125201	125207	125219	125221	125231	125243	125261	125269
125287	125299	125303	125311	125329	125339	125353	125371
125383	125387	125399	125407	125423	125429	125441	125453
125471	125497	125507	125509	125527	125539	125551	125591
125597	125617	125621	125627	125639	125641	125651	125659
125669	125683	125687	125693	125707	125711	125717	125731
125737	125743	125753	125777	125789	125791	125803	125813
125821	125863	125887	125897	125899	125921	125927	125929
125933	125941	125959	125963	126001	126011	126013	126019
126023	126031	126037	126041	126047	126067	126079	126097
126107	126127	126131	126143	126151	126173	126199	126211
126223	126227	126229	126233	126241	126257	126271	126307
126311	126317	126323	126337	126341	126349	126359	126397
126421	126433	126443	126457	126461	126473	126481	126487

126491 126493 126499 126517 126541 126547 126551 126583
126601 126611 126613 126631 126641 126653 126683 126691
126703 126713 126719 126733 126739 126743 126751 126757
126761 126781 126823 126827 126839 126851 126857 126859
126913 126923 126943 126949 126961 126967 126989 127031
127033 127037 127051 127079 127081 127103 127123 127133
127139 127157 127163 127189 127207 127217 127219 127241
127247 127249 127261 127271 127277 127289 127291 127297
127301 127321 127331 127343 127363 127373 127399 127403
127423 127447 127453 127481 127487 127493 127507 127529
127541 127549 127579 127583 127591 127597 127601 127607
127609 127637 127643 127649 127657 127663 127669 127679
127681 127691 127703 127709 127711 127717 127727 127733
127739 127747 127763 127781 127807 127817 127819 127837
127843 127849 127859 127867 127873 127877 127913 127921
127931 127951 127973 127979 127997 128021 128033 128047
128053 128099 128111 128113 128119 128147 128153 128159
128173 128189 128201 128203 128213 128221 128237 128239
128257 128273 128287 128291 128311 128321 128327 128339
128341 128347 128351 128377 128389 128393 128399 128411
128413 128431 128437 128449 128461 128467 128473 128477
128483 128489 128509 128519 128521 128549 128551 128563
128591 128599 128603 128621 128629 128657 128659 128663
128669 128677 128683 128693 128717 128747 128749 128761
128767 128813 128819 128831 128833 128837 128857 128861
128873 128879 128903 128923 128939 128941 128951 128959
128969 128971 128981 128983 128987 128993 129001 129011
129023 129037 129049 129061 129083 129089 129097 129113
129119 129121 129127 129169 129187 129193 129197 129209
129221 129223 129229 129263 129277 129281 129287 129289
129293 129313 129341 129347 129361 129379 129401 129403

129419	129439	129443	129449	129457	129461	129469	129491
129497	129499	129509	129517	129527	129529	129533	129539
129553	129581	129587	129589	129593	129607	129629	129631
129641	129643	129671	129707	129719	129733	129737	129749
129757	129763	129769	129793	129803	129841	129853	129887
129893	129901	129917	129919	129937	129953	129959	129967
129971	130003	130021	130027	130043	130051	130057	130069
130073	130079	130087	130099	130121	130127	130147	130171
130183	130199	130201	130211	130223	130241	130253	130259
130261	130267	130279	130303	130307	130337	130343	130349
130363	130367	130369	130379	130399	130409	130411	130423
130439	130447	130457	130469	130477	130483	130489	130513
130517	130523	130531	130547	130553	130579	130589	130619
130621	130631	130633	130639	130643	130649	130651	130657
130681	130687	130693	130699	130729	130769	130783	130787
130807	130811	130817	130829	130841	130843	130859	130873
130927	130957	130969	130973	130981	130987	131009	131011
131023	131041	131059	131063	131071	131101	131111	131113
131129	131143	131149	131171	131203	131213	131221	131231
131249	131251	131267	131293	131297	131303	131311	131317
131321	131357	131363	131371	131381	131413	131431	131437
131441	131447	131449	131477	131479	131489	131497	131501
131507	131519	131543	131561	131581	131591	131611	131617
131627	131639	131641	131671	131687	131701	131707	131711
131713	131731	131743	131749	131759	131771	131777	131779
131783	131797	131837	131839	131849	131861	131891	131893
131899	131909	131927	131933	131939	131941	131947	131959
131969	132001	132019	132047	132049	132059	132071	132103
132109	132113	132137	132151	132157	132169	132173	132199
132229	132233	132241	132247	132257	132263	132283	132287
132299	132313	132329	132331	132347	132361	132367	132371

132383 132403 132409 132421 132437 132439 132469 132491
132499 132511 132523 132527 132529 132533 132541 132547
132589 132607 132611 132619 132623 132631 132637 132647
132661 132667 132679 132689 132697 132701 132707 132709
132721 132739 132749 132751 132757 132761 132763 132817
132833 132851 132857 132859 132863 132887 132893 132911
132929 132947 132949 132953 132961 132967 132971 132989
133013 133033 133039 133051 133069 133073 133087 133097
133103 133109 133117 133121 133153 133157 133169 133183
133187 133201 133213 133241 133253 133261 133271 133277
133279 133283 133303 133319 133321 133327 133337 133349
133351 133379 133387 133391 133403 133417 133439 133447
133451 133481 133493 133499 133519 133541 133543 133559
133571 133583 133597 133631 133633 133649 133657 133669
133673 133691 133697 133709 133711 133717 133723 133733
133769 133781 133801 133811 133813 133831 133843 133853
133873 133877 133919 133949 133963 133967 133979 133981
133993 133999 134033 134039 134047 134053 134059 134077
134081 134087 134089 134093 134129 134153 134161 134171
134177 134191 134207 134213 134219 134227 134243 134257
134263 134269 134287 134291 134293 134327 134333 134339
134341 134353 134359 134363 134369 134371 134399 134401
134417 134437 134443 134471 134489 134503 134507 134513
134581 134587 134591 134593 134597 134609 134639 134669
134677 134681 134683 134699 134707 134731 134741 134753
134777 134789 134807 134837 134839 134851 134857 134867
134873 134887 134909 134917 134921 134923 134947 134951
134989 134999 135007 135017 135019 135029 135043 135049
135059 135077 135089 135101 135119 135131 135151 135173
135181 135193 135197 135209 135211 135221 135241 135257
135271 135277 135281 135283 135301 135319 135329 135347

135349	135353	135367	135389	135391	135403	135409	135427
135431	135433	135449	135461	135463	135467	135469	135479
135497	135511	135533	135559	135571	135581	135589	135593
135599	135601	135607	135613	135617	135623	135637	135647
135649	135661	135671	135697	135701	135719	135721	135727
135731	135743	135757	135781	135787	135799	135829	135841
135851	135859	135887	135893	135899	135911	135913	135929
135937	135977	135979	136013	136027	136033	136043	136057
136067	136069	136093	136099	136111	136133	136139	136163
136177	136189	136193	136207	136217	136223	136237	136247
136261	136273	136277	136303	136309	136319	136327	136333
136337	136343	136351	136361	136373	136379	136393	136397
136399	136403	136417	136421	136429	136447	136453	136463
136471	136481	136483	136501	136511	136519	136523	136531
136537	136541	136547	136559	136573	136601	136603	136607
136621	136649	136651	136657	136691	136693	136709	136711
136727	136733	136739	136751	136753	136769	136777	136811
136813	136841	136849	136859	136861	136879	136883	136889
136897	136943	136949	136951	136963	136973	136979	136987
136991	136993	136999	137029	137077	137087	137089	137117
137119	137131	137143	137147	137153	137177	137183	137191
137197	137201	137209	137219	137239	137251	137273	137279
137303	137321	137339	137341	137353	137359	137363	137369
137383	137387	137393	137399	137413	137437	137443	137447
137453	137477	137483	137491	137507	137519	137537	137567
137573	137587	137593	137597	137623	137633	137639	137653
137659	137699	137707	137713	137723	137737	137743	137771
137777	137791	137803	137827	137831	137849	137867	137869
137873	137909	137911	137927	137933	137941	137947	137957
137983	137993	137999	138007	138041	138053	138059	138071
138077	138079	138101	138107	138113	138139	138143	138157

138163 138179 138181 138191 138197 138209 138239 138241
138247 138251 138283 138289 138311 138319 138323 138337
138349 138371 138373 138389 138401 138403 138407 138427
138433 138449 138451 138461 138469 138493 138497 138511
138517 138547 138559 138563 138569 138571 138577 138581
138587 138599 138617 138629 138637 138641 138647 138661
138679 138683 138727 138731 138739 138763 138793 138797
138799 138821 138829 138841 138863 138869 138883 138889
138893 138899 138917 138923 138937 138959 138967 138977
139021 139033 139067 139079 139091 139109 139121 139123
139133 139169 139177 139187 139199 139201 139241 139267
139273 139291 139297 139301 139303 139309 139313 139333
139339 139343 139361 139367 139369 139387 139393 139397
139409 139423 139429 139439 139457 139459 139483 139487
139493 139501 139511 139537 139547 139571 139589 139591
139597 139609 139619 139627 139661 139663 139681 139697
139703 139709 139721 139729 139739 139747 139753 139759
139787 139801 139813 139831 139837 139861 139871 139883
139891 139901 139907 139921 139939 139943 139967 139969
139981 139987 139991 139999 140009 140053 140057 140069
140071 140111 140123 140143 140159 140167 140171 140177
140191 140197 140207 140221 140227 140237 140249 140263
140269 140281 140297 140317 140321 140333 140339 140351
140363 140381 140401 140407 140411 140417 140419 140423
140443 140449 140453 140473 140477 140521 140527 140533
140549 140551 140557 140587 140593 140603 140611 140617
140627 140629 140639 140659 140663 140677 140681 140683
140689 140717 140729 140731 140741 140759 140761 140773
140779 140797 140813 140827 140831 140837 140839 140863
140867 140869 140891 140893 140897 140909 140929 140939
140977 140983 140989 141023 141041 141061 141067 141073

141079	141101	141107	141121	141131	141157	141161	141179
141181	141199	141209	141221	141223	141233	141241	141257
141263	141269	141277	141283	141301	141307	141311	141319
141353	141359	141371	141397	141403	141413	141439	141443
141461	141481	141497	141499	141509	141511	141529	141539
141551	141587	141601	141613	141619	141623	141629	141637
141649	141653	141667	141671	141677	141679	141689	141697
141707	141709	141719	141731	141761	141767	141769	141773
141793	141803	141811	141829	141833	141851	141853	141863
141871	141907	141917	141931	141937	141941	141959	141961
141971	141991	142007	142019	142031	142039	142049	142057
142061	142067	142097	142099	142111	142123	142151	142157
142159	142169	142183	142189	142193	142211	142217	142223
142231	142237	142271	142297	142319	142327	142357	142369
142381	142391	142403	142421	142427	142433	142453	142469
142501	142529	142537	142543	142547	142553	142559	142567
142573	142589	142591	142601	142607	142609	142619	142657
142673	142697	142699	142711	142733	142757	142759	142771
142787	142789	142799	142811	142837	142841	142867	142871
142873	142897	142903	142907	142939	142949	142963	142969
142973	142979	142981	142993	143053	143063	143093	143107
143111	143113	143137	143141	143159	143177	143197	143239
143243	143249	143257	143261	143263	143281	143287	143291
143329	143333	143357	143387	143401	143413	143419	143443
143461	143467	143477	143483	143489	143501	143503	143509
143513	143519	143527	143537	143551	143567	143569	143573
143593	143609	143617	143629	143651	143653	143669	143677
143687	143699	143711	143719	143729	143743	143779	143791
143797	143807	143813	143821	143827	143831	143833	143873
143879	143881	143909	143947	143953	143971	143977	143981
143999	144013	144031	144037	144061	144071	144073	144103

144139 144161 144163 144167 144169 144173 144203 144223
144241 144247 144253 144259 144271 144289 144299 144307
144311 144323 144341 144349 144379 144383 144407 144409
144413 144427 144439 144451 144461 144479 144481 144497
144511 144539 144541 144563 144569 144577 144583 144589
144593 144611 144629 144659 144667 144671 144701 144709
144719 144731 144737 144751 144757 144763 144773 144779
144791 144817 144829 144839 144847 144883 144887 144889
144899 144917 144931 144941 144961 144967 144973 144983
145007 145009 145021 145031 145037 145043 145063 145069
145091 145109 145121 145133 145139 145177 145193 145207
145213 145219 145253 145259 145267 145283 145289 145303
145307 145349 145361 145381 145391 145399 145417 145423
145433 145441 145451 145459 145463 145471 145477 145487
145501 145511 145513 145517 145531 145543 145547 145549
145577 145589 145601 145603 145633 145637 145643 145661
145679 145681 145687 145703 145709 145721 145723 145753
145757 145759 145771 145777 145799 145807 145819 145823
145829 145861 145879 145897 145903 145931 145933 145949
145963 145967 145969 145987 145991 146009 146011 146021
146023 146033 146051 146057 146059 146063 146077 146093
146099 146117 146141 146161 146173 146191 146197 146203
146213 146221 146239 146249 146273 146291 146297 146299
146309 146317 146323 146347 146359 146369 146381 146383
146389 146407 146417 146423 146437 146449 146477 146513
146519 146521 146527 146539 146543 146563 146581 146603
146609 146617 146639 146647 146669 146677 146681 146683
146701 146719 146743 146749 146767 146777 146801 146807
146819 146833 146837 146843 146849 146857 146891 146893
146917 146921 146933 146941 146953 146977 146983 146987
146989 147011 147029 147031 147047 147073 147083 147089

147097	147107	147137	147139	147151	147163	147179	147197
147209	147211	147221	147227	147229	147253	147263	147283
147289	147293	147299	147311	147319	147331	147341	147347
147353	147377	147391	147397	147401	147409	147419	147449
147451	147457	147481	147487	147503	147517	147541	147547
147551	147557	147571	147583	147607	147613	147617	147629
147647	147661	147671	147673	147689	147703	147709	147727
147739	147743	147761	147769	147773	147779	147787	147793
147799	147811	147827	147853	147859	147863	147881	147919
147937	147949	147977	147997	148013	148021	148061	148063
148073	148079	148091	148123	148139	148147	148151	148153
148157	148171	148193	148199	148201	148207	148229	148243
148249	148279	148301	148303	148331	148339	148361	148367
148381	148387	148399	148403	148411	148429	148439	148457
148469	148471	148483	148501	148513	148517	148531	148537
148549	148573	148579	148609	148627	148633	148639	148663
148667	148669	148691	148693	148711	148721	148723	148727
148747	148763	148781	148783	148793	148817	148829	148853
148859	148861	148867	148873	148891	148913	148921	148927
148931	148933	148949	148957	148961	148991	148997	149011
149021	149027	149033	149053	149057	149059	149069	149077
149087	149099	149101	149111	149113	149119	149143	149153
149159	149161	149173	149183	149197	149213	149239	149249
149251	149257	149269	149287	149297	149309	149323	149333
149341	149351	149371	149377	149381	149393	149399	149411
149417	149419	149423	149441	149459	149489	149491	149497
149503	149519	149521	149531	149533	149543	149551	149561
149563	149579	149603	149623	149627	149629	149689	149711
149713	149717	149729	149731	149749	149759	149767	149771
149791	149803	149827	149837	149839	149861	149867	149873
149893	149899	149909	149911	149921	149939	149953	149969

149971 149993 150001 150011 150041 150053 150061 150067
150077 150083 150089 150091 150097 150107 150131 150151
150169 150193 150197 150203 150209 150211 150217 150221
150223 150239 150247 150287 150299 150301 150323 150329
150343 150373 150377 150379 150383 150401 150407 150413
150427 150431 150439 150473 150497 150503 150517 150523
150533 150551 150559 150571 150583 150587 150589 150607
150611 150617 150649 150659 150697 150707 150721 150743
150767 150769 150779 150791 150797 150827 150833 150847
150869 150881 150883 150889 150893 150901 150907 150919
150929 150959 150961 150967 150979 150989 150991 151007
151009 151013 151027 151049 151051 151057 151091 151121
151141 151153 151157 151163 151169 151171 151189 151201
151213 151237 151241 151243 151247 151253 151273 151279
151289 151303 151337 151339 151343 151357 151379 151381
151391 151397 151423 151429 151433 151451 151471 151477
151483 151499 151507 151517 151523 151531 151537 151549
151553 151561 151573 151579 151597 151603 151607 151609
151631 151637 151643 151651 151667 151673 151681 151687
151693 151703 151717 151729 151733 151769 151771 151783
151787 151799 151813 151817 151841 151847 151849 151871
151883 151897 151901 151903 151909 151937 151939 151967
151969 152003 152017 152027 152029 152039 152041 152063
152077 152081 152083 152093 152111 152123 152147 152183
152189 152197 152203 152213 152219 152231 152239 152249
152267 152287 152293 152297 152311 152363 152377 152381
152389 152393 152407 152417 152419 152423 152429 152441
152443 152459 152461 152501 152519 152531 152533 152539
152563 152567 152597 152599 152617 152623 152629 152639
152641 152657 152671 152681 152717 152723 152729 152753
152767 152777 152783 152791 152809 152819 152821 152833

152837	152839	152843	152851	152857	152879	152897	152899
152909	152939	152941	152947	152953	152959	152981	152989
152993	153001	153059	153067	153071	153073	153077	153089
153107	153113	153133	153137	153151	153191	153247	153259
153269	153271	153277	153281	153287	153313	153319	153337
153343	153353	153359	153371	153379	153407	153409	153421
153427	153437	153443	153449	153457	153469	153487	153499
153509	153511	153521	153523	153529	153533	153557	153563
153589	153607	153611	153623	153641	153649	153689	153701
153719	153733	153739	153743	153749	153757	153763	153817
153841	153871	153877	153887	153889	153911	153913	153929
153941	153947	153949	153953	153991	153997	154001	154027
154043	154057	154061	154067	154073	154079	154081	154087
154097	154111	154127	154153	154157	154159	154181	154183
154211	154213	154229	154243	154247	154267	154277	154279
154291	154303	154313	154321	154333	154339	154351	154369
154373	154387	154409	154417	154423	154439	154459	154487
154493	154501	154523	154543	154571	154573	154579	154589
154591	154613	154619	154621	154643	154667	154669	154681
154691	154699	154723	154727	154733	154747	154753	154769
154787	154789	154799	154807	154823	154841	154849	154871
154873	154877	154883	154897	154927	154933	154937	154943
154981	154991	155003	155009	155017	155027	155047	155069
155081	155083	155087	155119	155137	155153	155161	155167
155171	155191	155201	155203	155209	155219	155231	155251
155269	155291	155299	155303	155317	155327	155333	155371
155377	155381	155383	155387	155399	155413	155423	155443
155453	155461	155473	155501	155509	155521	155537	155539
155557	155569	155579	155581	155593	155599	155609	155621
155627	155653	155657	155663	155671	155689	155693	155699
155707	155717	155719	155723	155731	155741	155747	155773

155777 155783 155797 155801 155809 155821 155833 155849
155851 155861 155863 155887 155891 155893 155921 156007
156011 156019 156041 156059 156061 156071 156089 156109
156119 156127 156131 156139 156151 156157 156217 156227
156229 156241 156253 156257 156259 156269 156307 156319
156329 156347 156353 156361 156371 156419 156421 156437
156467 156487 156491 156493 156511 156521 156539 156577
156589 156593 156601 156619 156623 156631 156641 156659
156671 156677 156679 156683 156691 156703 156707 156719
156727 156733 156749 156781 156797 156799 156817 156823
156833 156841 156887 156899 156901 156913 156941 156943
156967 156971 156979 157007 157013 157019 157037 157049
157051 157057 157061 157081 157103 157109 157127 157133
157141 157163 157177 157181 157189 157207 157211 157217
157219 157229 157231 157243 157247 157253 157259 157271
157273 157277 157279 157291 157303 157307 157321 157327
157349 157351 157363 157393 157411 157427 157429 157433
157457 157477 157483 157489 157513 157519 157523 157543
157559 157561 157571 157579 157627 157637 157639 157649
157667 157669 157679 157721 157733 157739 157747 157769
157771 157793 157799 157813 157823 157831 157837 157841
157867 157877 157889 157897 157901 157907 157931 157933
157951 157991 157999 158003 158009 158017 158029 158047
158071 158077 158113 158129 158141 158143 158161 158189
158201 158209 158227 158231 158233 158243 158261 158269
158293 158303 158329 158341 158351 158357 158359 158363
158371 158393 158407 158419 158429 158443 158449 158489
158507 158519 158527 158537 158551 158563 158567 158573
158581 158591 158597 158611 158617 158621 158633 158647
158657 158663 158699 158731 158747 158749 158759 158761
158771 158777 158791 158803 158843 158849 158863 158867

158881 158909 158923 158927 158941 158959 158981 158993
159013 159017 159023 159059 159073 159079 159097 159113
159119 159157 159161 159167 159169 159179 159191 159193
159199 159209 159223 159227 159233 159287 159293 159311
159319 159337 159347 159349 159361 159389 159403 159407
159421 159431 159437 159457 159463 159469 159473 159491
159499 159503 159521 159539 159541 159553 159563 159569
159571 159589 159617 159623 159629 159631 159667 159671
159673 159683 159697 159701 159707 159721 159737 159739
159763 159769 159773 159779 159787 159791 159793 159799
159811 159833 159839 159853 159857 159869 159871 159899
159911 159931 159937 159977 159979 160001 160009 160019
160031 160033 160049 160073 160079 160081 160087 160091
160093 160117 160141 160159 160163 160169 160183 160201
160207 160217 160231 160243 160253 160309 160313 160319
160343 160357 160367 160373 160387 160397 160403 160409
160423 160441 160453 160481 160483 160499 160507 160541
160553 160579 160583 160591 160603 160619 160621 160627
160637 160639 160649 160651 160663 160669 160681 160687
160697 160709 160711 160723 160739 160751 160753 160757
160781 160789 160807 160813 160817 160829 160841 160861
160877 160879 160883 160903 160907 160933 160967 160969
160981 160997 161009 161017 161033 161039 161047 161053
161059 161071 161087 161093 161123 161137 161141 161149
161159 161167 161201 161221 161233 161237 161263 161267
161281 161303 161309 161323 161333 161339 161341 161363
161377 161387 161407 161411 161453 161459 161461 161471
161503 161507 161521 161527 161531 161543 161561 161563
161569 161573 161591 161599 161611 161627 161639 161641
161659 161683 161717 161729 161731 161741 161743 161753
161761 161771 161773 161779 161783 161807 161831 161839

161869	161873	161879	161881	161911	161921	161923	161947
161957	161969	161971	161977	161983	161999	162007	162011
162017	162053	162059	162079	162091	162109	162119	162143
162209	162221	162229	162251	162257	162263	162269	162277
162287	162289	162293	162343	162359	162389	162391	162413
162419	162439	162451	162457	162473	162493	162499	162517
162523	162527	162529	162553	162557	162563	162577	162593
162601	162611	162623	162629	162641	162649	162671	162677
162683	162691	162703	162709	162713	162727	162731	162739
162749	162751	162779	162787	162791	162821	162823	162829
162839	162847	162853	162859	162881	162889	162901	162907
162917	162937	162947	162971	162973	162989	162997	163003
163019	163021	163027	163061	163063	163109	163117	163127
163129	163147	163151	163169	163171	163181	163193	163199
163211	163223	163243	163249	163259	163307	163309	163321
163327	163337	163351	163363	163367	163393	163403	163409
163411	163417	163433	163469	163477	163481	163483	163487
163517	163543	163561	163567	163573	163601	163613	163621
163627	163633	163637	163643	163661	163673	163679	163697
163729	163733	163741	163753	163771	163781	163789	163811
163819	163841	163847	163853	163859	163861	163871	163883
163901	163909	163927	163973	163979	163981	163987	163991
163993	163997	164011	164023	164039	164051	164057	164071
164089	164093	164113	164117	164147	164149	164173	164183
164191	164201	164209	164231	164233	164239	164249	164251
164267	164279	164291	164299	164309	164321	164341	164357
164363	164371	164377	164387	164413	164419	164429	164431
164443	164447	164449	164471	164477	164503	164513	164531
164569	164581	164587	164599	164617	164621	164623	164627
164653	164663	164677	164683	164701	164707	164729	164743
164767	164771	164789	164809	164821	164831	164837	164839

164881	164893	164911	164953	164963	164987	164999	165001
165037	165041	165047	165049	165059	165079	165083	165089
165103	165133	165161	165173	165181	165203	165211	165229
165233	165247	165287	165293	165311	165313	165317	165331
165343	165349	165367	165379	165383	165391	165397	165437
165443	165449	165457	165463	165469	165479	165511	165523
165527	165533	165541	165551	165553	165559	165569	165587
165589	165601	165611	165617	165653	165667	165673	165701
165703	165707	165709	165713	165719	165721	165749	165779
165799	165811	165817	165829	165833	165857	165877	165883
165887	165901	165931	165941	165947	165961	165983	166013
166021	166027	166031	166043	166063	166081	166099	166147
166151	166157	166169	166183	166189	166207	166219	166237
166247	166259	166273	166289	166297	166301	166303	166319
166349	166351	166357	166363	166393	166399	166403	166409
166417	166429	166457	166471	166487	166541	166561	166567
166571	166597	166601	166603	166609	166613	166619	166627
166631	166643	166657	166667	166669	166679	166693	166703
166723	166739	166741	166781	166783	166799	166807	166823
166841	166843	166847	166849	166853	166861	166867	166871
166909	166919	166931	166949	166967	166973	166979	166987
167009	167017	167021	167023	167033	167039	167047	167051
167071	167077	167081	167087	167099	167107	167113	167117
167119	167149	167159	167173	167177	167191	167197	167213
167221	167249	167261	167267	167269	167309	167311	167317
167329	167339	167341	167381	167393	167407	167413	167423
167429	167437	167441	167443	167449	167471	167483	167491
167521	167537	167543	167593	167597	167611	167621	167623
167627	167633	167641	167663	167677	167683	167711	167729
167747	167759	167771	167777	167779	167801	167809	167861
167863	167873	167879	167887	167891	167899	167911	167917

167953	167971	167987	168013	168023	168029	168037	168043
168067	168071	168083	168089	168109	168127	168143	168151
168193	168197	168211	168227	168247	168253	168263	168269
168277	168281	168293	168323	168331	168347	168353	168391
168409	168433	168449	168451	168457	168463	168481	168491
168499	168523	168527	168533	168541	168559	168599	168601
168617	168629	168631	168643	168673	168677	168697	168713
168719	168731	168737	168743	168761	168769	168781	168803
168851	168863	168869	168887	168893	168899	168901	168913
168937	168943	168977	168991	169003	169007	169009	169019
169049	169063	169067	169069	169079	169093	169097	169111
169129	169151	169159	169177	169181	169199	169217	169219
169241	169243	169249	169259	169283	169307	169313	169319
169321	169327	169339	169343	169361	169369	169373	169399
169409	169427	169457	169471	169483	169489	169493	169501
169523	169531	169553	169567	169583	169591	169607	169627
169633	169639	169649	169657	169661	169667	169681	169691
169693	169709	169733	169751	169753	169769	169777	169783
169789	169817	169823	169831	169837	169843	169859	169889
169891	169909	169913	169919	169933	169937	169943	169951
169957	169987	169991	170003	170021	170029	170047	170057
170063	170081	170099	170101	170111	170123	170141	170167
170179	170189	170197	170207	170213	170227	170231	170239
170243	170249	170263	170267	170279	170293	170299	170327
170341	170347	170351	170353	170363	170369	170371	170383
170389	170393	170413	170441	170447	170473	170483	170497
170503	170509	170537	170539	170551	170557	170579	170603
170609	170627	170633	170641	170647	170669	170689	170701
170707	170711	170741	170749	170759	170761	170767	170773
170777	170801	170809	170813	170827	170837	170843	170851
170857	170873	170881	170887	170899	170921	170927	170953

170957	170971	171007	171023	171029	171043	171047	171049
171053	171077	171079	171091	171103	171131	171161	171163
171167	171169	171179	171203	171233	171251	171253	171263
171271	171293	171299	171317	171329	171341	171383	171401
171403	171427	171439	171449	171467	171469	171473	171481
171491	171517	171529	171539	171541	171553	171559	171571
171583	171617	171629	171637	171641	171653	171659	171671
171673	171679	171697	171707	171713	171719	171733	171757
171761	171763	171793	171799	171803	171811	171823	171827
171851	171863	171869	171877	171881	171889	171917	171923
171929	171937	171947	172001	172009	172021	172027	172031
172049	172069	172079	172093	172097	172127	172147	172153
172157	172169	172171	172181	172199	172213	172217	172219
172223	172243	172259	172279	172283	172297	172307	172313
172321	172331	172343	172351	172357	172373	172399	172411
172421	172423	172427	172433	172439	172441	172489	172507
172517	172519	172541	172553	172561	172573	172583	172589
172597	172603	172607	172619	172633	172643	172649	172657
172663	172673	172681	172687	172709	172717	172721	172741
172751	172759	172787	172801	172807	172829	172849	172853
172859	172867	172871	172877	172883	172933	172969	172973
172981	172987	172993	172999	173021	173023	173039	173053
173059	173081	173087	173099	173137	173141	173149	173177
173183	173189	173191	173207	173209	173219	173249	173263
173267	173273	173291	173293	173297	173309	173347	173357
173359	173429	173431	173473	173483	173491	173497	173501
173531	173539	173543	173549	173561	173573	173599	173617
173629	173647	173651	173659	173669	173671	173683	173687
173699	173707	173713	173729	173741	173743	173773	173777
173779	173783	173807	173819	173827	173839	173851	173861
173867	173891	173897	173909	173917	173923	173933	173969

173977 173981 173993 174007 174017 174019 174047 174049
174061 174067 174071 174077 174079 174091 174101 174121
174137 174143 174149 174157 174169 174197 174221 174241
174257 174259 174263 174281 174289 174299 174311 174329
174331 174337 174347 174367 174389 174407 174413 174431
174443 174457 174467 174469 174481 174487 174491 174527
174533 174569 174571 174583 174599 174613 174617 174631
174637 174649 174653 174659 174673 174679 174703 174721
174737 174749 174761 174763 174767 174773 174799 174821
174829 174851 174859 174877 174893 174901 174907 174917
174929 174931 174943 174959 174989 174991 175003 175013
175039 175061 175067 175069 175079 175081 175103 175129
175141 175211 175229 175261 175267 175277 175291 175303
175309 175327 175333 175349 175361 175391 175393 175403
175411 175433 175447 175453 175463 175481 175493 175499
175519 175523 175543 175573 175601 175621 175631 175633
175649 175663 175673 175687 175691 175699 175709 175723
175727 175753 175757 175759 175781 175783 175811 175829
175837 175843 175853 175859 175873 175891 175897 175909
175919 175937 175939 175949 175961 175963 175979 175991
175993 176017 176021 176023 176041 176047 176051 176053
176063 176081 176087 176089 176123 176129 176153 176159
176161 176179 176191 176201 176207 176213 176221 176227
176237 176243 176261 176299 176303 176317 176321 176327
176329 176333 176347 176353 176357 176369 176383 176389
176401 176413 176417 176419 176431 176459 176461 176467
176489 176497 176503 176507 176509 176521 176531 176537
176549 176551 176557 176573 176591 176597 176599 176609
176611 176629 176641 176651 176677 176699 176711 176713
176741 176747 176753 176777 176779 176789 176791 176797
176807 176809 176819 176849 176857 176887 176899 176903

176921	176923	176927	176933	176951	176977	176983	176989
177007	177011	177013	177019	177043	177091	177101	177109
177113	177127	177131	177167	177173	177209	177211	177217
177223	177239	177257	177269	177283	177301	177319	177323
177337	177347	177379	177383	177409	177421	177427	177431
177433	177467	177473	177481	177487	177493	177511	177533
177539	177553	177589	177601	177623	177647	177677	177679
177691	177739	177743	177761	177763	177787	177791	177797
177811	177823	177839	177841	177883	177887	177889	177893
177907	177913	177917	177929	177943	177949	177953	177967
177979	178001	178021	178037	178039	178067	178069	178091
178093	178103	178117	178127	178141	178151	178169	178183
178187	178207	178223	178231	178247	178249	178259	178261
178289	178301	178307	178327	178333	178349	178351	178361
178393	178397	178403	178417	178439	178441	178447	178469
178481	178487	178489	178501	178513	178531	178537	178559
178561	178567	178571	178597	178601	178603	178609	178613
178621	178627	178639	178643	178681	178691	178693	178697
178753	178757	178781	178793	178799	178807	178813	178817
178819	178831	178853	178859	178873	178877	178889	178897
178903	178907	178909	178921	178931	178933	178939	178951
178973	178987	179021	179029	179033	179041	179051	179057
179083	179089	179099	179107	179111	179119	179143	179161
179167	179173	179203	179209	179213	179233	179243	179261
179269	179281	179287	179317	179321	179327	179351	179357
179369	179381	179383	179393	179407	179411	179429	179437
179441	179453	179461	179471	179479	179483	179497	179519
179527	179533	179549	179563	179573	179579	179581	179591
179593	179603	179623	179633	179651	179657	179659	179671
179687	179689	179693	179717	179719	179737	179743	179749
179779	179801	179807	179813	179819	179821	179827	179833

179849	179897	179899	179903	179909	179917	179923	179939
179947	179951	179953	179957	179969	179981	179989	179999
180001	180007	180023	180043	180053	180071	180073	180077
180097	180137	180161	180179	180181	180211	180221	180233
180239	180241	180247	180259	180263	180281	180287	180289
180307	180311	180317	180331	180337	180347	180361	180371
180379	180391	180413	180419	180437	180463	180473	180491
180497	180503	180511	180533	180539	180541	180547	180563
180569	180617	180623	180629	180647	180667	180679	180701
180731	180749	180751	180773	180779	180793	180797	180799
180811	180847	180871	180883	180907	180949	180959	181001
181003	181019	181031	181039	181061	181063	181081	181087
181123	181141	181157	181183	181193	181199	181201	181211
181213	181219	181243	181253	181273	181277	181283	181297
181301	181303	181361	181387	181397	181399	181409	181421
181439	181457	181459	181499	181501	181513	181523	181537
181549	181553	181603	181607	181609	181619	181639	181667
181669	181693	181711	181717	181721	181729	181739	181751
181757	181759	181763	181777	181787	181789	181813	181837
181871	181873	181889	181891	181903	181913	181919	181927
181931	181943	181957	181967	181981	181997	182009	182011
182027	182029	182041	182047	182057	182059	182089	182099
182101	182107	182111	182123	182129	182131	182141	182159
182167	182177	182179	182201	182209	182233	182239	182243
182261	182279	182297	182309	182333	182339	182341	182353
182387	182389	182417	182423	182431	182443	182453	182467
182471	182473	182489	182503	182509	182519	182537	182549
182561	182579	182587	182593	182599	182603	182617	182627
182639	182641	182653	182657	182659	182681	182687	182701
182711	182713	182747	182773	182779	182789	182803	182813
182821	182839	182851	182857	182867	182887	182893	182899

182921	182927	182929	182933	182953	182957	182969	182981
182999	183023	183037	183041	183047	183059	183067	183089
183091	183119	183151	183167	183191	183203	183247	183259
183263	183283	183289	183299	183301	183307	183317	183319
183329	183343	183349	183361	183373	183377	183383	183389
183397	183437	183439	183451	183461	183473	183479	183487
183497	183499	183503	183509	183511	183523	183527	183569
183571	183577	183581	183587	183593	183611	183637	183661
183683	183691	183697	183707	183709	183713	183761	183763
183797	183809	183823	183829	183871	183877	183881	183907
183917	183919	183943	183949	183959	183971	183973	183979
184003	184007	184013	184031	184039	184043	184057	184073
184081	184087	184111	184117	184133	184153	184157	184181
184187	184189	184199	184211	184231	184241	184259	184271
184273	184279	184291	184309	184321	184333	184337	184351
184369	184409	184417	184441	184447	184463	184477	184487
184489	184511	184517	184523	184553	184559	184567	184571
184577	184607	184609	184627	184631	184633	184649	184651
184669	184687	184693	184703	184711	184721	184727	184733
184753	184777	184823	184829	184831	184837	184843	184859
184879	184901	184903	184913	184949	184957	184967	184969
184993	184997	184999	185021	185027	185051	185057	185063
185069	185071	185077	185089	185099	185123	185131	185137
185149	185153	185161	185167	185177	185183	185189	185221
185233	185243	185267	185291	185299	185303	185309	185323
185327	185359	185363	185369	185371	185401	185429	185441
185467	185477	185483	185491	185519	185527	185531	185533
185539	185543	185551	185557	185567	185569	185593	185599
185621	185641	185651	185677	185681	185683	185693	185699
185707	185711	185723	185737	185747	185749	185753	185767
185789	185797	185813	185819	185821	185831	185833	185849

185869 185873 185893 185897 185903 185917 185923 185947
185951 185957 185959 185971 185987 185993 186007 186013
186019 186023 186037 186041 186049 186071 186097 186103
186107 186113 186119 186149 186157 186161 186163 186187
186191 186211 186227 186229 186239 186247 186253 186259
186271 186283 186299 186301 186311 186317 186343 186377
186379 186391 186397 186419 186437 186451 186469 186479
186481 186551 186569 186581 186583 186587 186601 186619
186629 186647 186649 186653 186671 186679 186689 186701
186707 186709 186727 186733 186743 186757 186761 186763
186773 186793 186799 186841 186859 186869 186871 186877
186883 186889 186917 186947 186959 187003 187009 187027
187043 187049 187067 187069 187073 187081 187091 187111
187123 187127 187129 187133 187139 187141 187163 187171
187177 187181 187189 187193 187211 187217 187219 187223
187237 187273 187277 187303 187337 187339 187349 187361
187367 187373 187379 187387 187393 187409 187417 187423
187433 187441 187463 187469 187471 187477 187507 187513
187531 187547 187559 187573 187597 187631 187633 187637
187639 187651 187661 187669 187687 187699 187711 187721
187751 187763 187787 187793 187823 187843 187861 187871
187877 187883 187897 187907 187909 187921 187927 187931
187951 187963 187973 187987 188011 188017 188021 188029
188107 188137 188143 188147 188159 188171 188179 188189
188197 188249 188261 188273 188281 188291 188299 188303
188311 188317 188323 188333 188351 188359 188369 188389
188401 188407 188417 188431 188437 188443 188459 188473
188483 188491 188519 188527 188533 188563 188579 188603
188609 188621 188633 188653 188677 188681 188687 188693
188701 188707 188711 188719 188729 188753 188767 188779
188791 188801 188827 188831 188833 188843 188857 188861

188863 188869 188891 188911 188927 188933 188939 188941
188953 188957 188983 188999 189011 189017 189019 189041
189043 189061 189067 189127 189139 189149 189151 189169
189187 189199 189223 189229 189239 189251 189253 189257
189271 189307 189311 189337 189347 189349 189353 189361
189377 189389 189391 189401 189407 189421 189433 189437
189439 189463 189467 189473 189479 189491 189493 189509
189517 189523 189529 189547 189559 189583 189593 189599
189613 189617 189619 189643 189653 189661 189671 189691
189697 189701 189713 189733 189743 189757 189767 189797
189799 189817 189823 189851 189853 189859 189877 189881
189887 189901 189913 189929 189947 189949 189961 189967
189977 189983 189989 189997 190027 190031 190051 190063
190093 190097 190121 190129 190147 190159 190181 190207
190243 190249 190261 190271 190283 190297 190301 190313
190321 190331 190339 190357 190367 190369 190387 190391
190403 190409 190471 190507 190523 190529 190537 190543
190573 190577 190579 190583 190591 190607 190613 190633
190639 190649 190657 190667 190669 190699 190709 190711
190717 190753 190759 190763 190769 190783 190787 190793
190807 190811 190823 190829 190837 190843 190871 190889
190891 190901 190909 190913 190921 190979 190997 191021
191027 191033 191039 191047 191057 191071 191089 191099
191119 191123 191137 191141 191143 191161 191173 191189
191227 191231 191237 191249 191251 191281 191297 191299
191339 191341 191353 191413 191441 191447 191449 191453
191459 191461 191467 191473 191491 191497 191507 191509
191519 191531 191533 191537 191551 191561 191563 191579
191599 191621 191627 191657 191669 191671 191677 191689
191693 191699 191707 191717 191747 191749 191773 191783
191791 191801 191803 191827 191831 191833 191837 191861

191899 191903 191911 191929 191953 191969 191977 191999
192007 192013 192029 192037 192043 192047 192053 192091
192097 192103 192113 192121 192133 192149 192161 192173
192187 192191 192193 192229 192233 192239 192251 192259
192263 192271 192307 192317 192319 192323 192341 192343
192347 192373 192377 192383 192391 192407 192431 192461
192463 192497 192499 192529 192539 192547 192553 192557
192571 192581 192583 192587 192601 192611 192613 192617
192629 192631 192637 192667 192677 192697 192737 192743
192749 192757 192767 192781 192791 192799 192811 192817
192833 192847 192853 192859 192877 192883 192887 192889
192917 192923 192931 192949 192961 192971 192977 192979
192991 193003 193009 193013 193031 193043 193051 193057
193073 193093 193133 193139 193147 193153 193163 193181
193183 193189 193201 193243 193247 193261 193283 193301
193327 193337 193357 193367 193373 193379 193381 193387
193393 193423 193433 193441 193447 193451 193463 193469
193493 193507 193513 193541 193549 193559 193573 193577
193597 193601 193603 193607 193619 193649 193663 193679
193703 193723 193727 193741 193751 193757 193763 193771
193789 193793 193799 193811 193813 193841 193847 193859
193861 193871 193873 193877 193883 193891 193937 193939
193943 193951 193957 193979 193993 194003 194017 194027
194057 194069 194071 194083 194087 194093 194101 194113
194119 194141 194149 194167 194179 194197 194203 194239
194263 194267 194269 194309 194323 194353 194371 194377
194413 194431 194443 194471 194479 194483 194507 194521
194527 194543 194569 194581 194591 194609 194647 194653
194659 194671 194681 194683 194687 194707 194713 194717
194723 194729 194749 194767 194771 194809 194813 194819
194827 194839 194861 194863 194867 194869 194891 194899

194911	194917	194933	194963	194977	194981	194989	195023
195029	195043	195047	195049	195053	195071	195077	195089
195103	195121	195127	195131	195137	195157	195161	195163
195193	195197	195203	195229	195241	195253	195259	195271
195277	195281	195311	195319	195329	195341	195343	195353
195359	195389	195401	195407	195413	195427	195443	195457
195469	195479	195493	195497	195511	195527	195539	195541
195581	195593	195599	195659	195677	195691	195697	195709
195731	195733	195737	195739	195743	195751	195761	195781
195787	195791	195809	195817	195863	195869	195883	195887
195893	195907	195913	195919	195929	195931	195967	195971
195973	195977	195991	195997	196003	196033	196039	196043
196051	196073	196081	196087	196111	196117	196139	196159
196169	196171	196177	196181	196187	196193	196201	196247
196271	196277	196279	196291	196303	196307	196331	196337
196379	196387	196429	196439	196453	196459	196477	196499
196501	196519	196523	196541	196543	196549	196561	196579
196583	196597	196613	196643	196657	196661	196663	196681
196687	196699	196709	196717	196727	196739	196751	196769
196771	196799	196817	196831	196837	196853	196871	196873
196879	196901	196907	196919	196927	196961	196991	196993
197003	197009	197023	197033	197059	197063	197077	197083
197089	197101	197117	197123	197137	197147	197159	197161
197203	197207	197221	197233	197243	197257	197261	197269
197273	197279	197293	197297	197299	197311	197339	197341
197347	197359	197369	197371	197381	197383	197389	197419
197423	197441	197453	197479	197507	197521	197539	197551
197567	197569	197573	197597	197599	197609	197621	197641
197647	197651	197677	197683	197689	197699	197711	197713
197741	197753	197759	197767	197773	197779	197803	197807
197831	197837	197887	197891	197893	197909	197921	197927

197933 197947 197957 197959 197963 197969 197971 198013
198017 198031 198043 198047 198073 198083 198091 198097
198109 198127 198139 198173 198179 198193 198197 198221
198223 198241 198251 198257 198259 198277 198281 198301
198313 198323 198337 198347 198349 198377 198391 198397
198409 198413 198427 198437 198439 198461 198463 198469
198479 198491 198503 198529 198533 198553 198571 198589
198593 198599 198613 198623 198637 198641 198647 198659
198673 198689 198701 198719 198733 198761 198769 198811
198817 198823 198827 198829 198833 198839 198841 198851
198859 198899 198901 198929 198937 198941 198943 198953
198959 198967 198971 198977 198997 199021 199033 199037
199039 199049 199081 199103 199109 199151 199153 199181
199193 199207 199211 199247 199261 199267 199289 199313
199321 199337 199343 199357 199373 199379 199399 199403
199411 199417 199429 199447 199453 199457 199483 199487
199489 199499 199501 199523 199559 199567 199583 199601
199603 199621 199637 199657 199669 199673 199679 199687
199697 199721 199729 199739 199741 199751 199753 199777
199783 199799 199807 199811 199813 199819 199831 199853
199873 199877 199889 199909 199921 199931 199933 199961
199967 199999

共筛得素数的个数为：17984

0~5000 的素数有 669 个　5000 以内的素数有 669 个

5000~10000 的素数有 560 个　10000 以内的素数有 1229 个

10000~15000 的素数有 525 个　15000 以内的素数有 1754 个

15000~20000 的素数有 508 个　20000 以内的素数有 2262 个

20000~25000 的素数有 500 个　25000 以内的素数有 2762 个

25000~30000 的素数有 483 个　30000 以内的素数有 3245 个

30000~35000 的素数有 487 个　35000 以内的素数有 3732 个
35000~40000 的素数有 471 个　40000 以内的素数有 4203 个
40000~45000 的素数有 472 个　45000 以内的素数有 4675 个
45000~50000 的素数有 458 个　50000 以内的素数有 5133 个
50000~55000 的素数有 457 个　55000 以内的素数有 5590 个
55000~60000 的素数有 467 个　60000 以内的素数有 6057 个
60000~65000 的素数有 436 个　65000 以内的素数有 6493 个
65000~70000 的素数有 442 个　70000 以内的素数有 6935 个
70000~75000 的素数有 458 个　75000 以内的素数有 7393 个
75000~80000 的素数有 444 个　80000 以内的素数有 7837 个
80000~85000 的素数有 440 个　85000 以内的素数有 8277 个
85000~90000 的素数有 436 个　90000 以内的素数有 8713 个
90000~95000 的素数有 444 个　95000 以内的素数有 9157 个
95000~100000 的素数有 435 个　100000 以内的素数有 9592 个
100000~105000 的素数有 432 个　105000 以内的素数有 10024 个
105000~110000 的素数有 429 个　110000 以内的素数有 10453 个
110000~115000 的素数有 418 个　115000 以内的素数有 10871 个
115000~120000 的素数有 430 个　120000 以内的素数有 11301 个
120000~125000 的素数有 433 个　125000 以内的素数有 11734 个
125000~130000 的素数有 425 个　130000 以内的素数有 12159 个
130000~135000 的素数有 417 个　135000 以内的素数有 12576 个
135000~140000 的素数有 434 个　140000 以内的素数有 13010 个
140000~145000 的素数有 412 个　145000 以内的素数有 13422 个
145000~150000 的素数有 426 个　150000 以内的素数有 13848 个
150000~155000 的素数有 424 个　155000 以内的素数有 14272 个
155000~160000 的素数有 411 个　160000 以内的素数有 14683 个
160000~165000 的素数有 410 个　165000 以内的素数有 15093 个

165000~170000 的素数有 404 个　170000 以内的素数有 15497 个
170000~175000 的素数有 419 个　175000 以内的素数有 15916 个
175000~180000 的素数有 426 个　180000 以内的素数有 16342 个
180000~185000 的素数有 403 个　185000 以内的素数有 16745 个
185000~190000 的素数有 425 个　190000 以内的素数有 17170 个
190000~195000 的素数有 403 个　195000 以内的素数有 17573 个
195000~200000 的素数有 411 个　200000 以内的素数有 17984 个

参 考 文 献

1 潘承洞，潘承彪．初等数论．北京：北京大学出版社，1999

2 李文林编．王元论哥德巴赫猜想．济南：山东教育出版社，1999

3 潘承洞，潘承彪．哥德巴赫猜想．北京：科学出版社，1981

4 Emil Grosswald. Long arithmetic progressions that consist only of primes and 5 almost primes. Notices Amer. Math. Soc., 26 (1979) A451

5 Emil Grosswald. Arithmetic progressions that consist only of primes. J. Number Theory, 14 (1982) 9~31

6 Lander L J & Parkin T R. Consecutive primes in arithmetic progression. Math. Comput., 21 (1967) 489

7 Erdos P. On the difference of consecutive primes. Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948) 885-889; MR10, 235

8 维诺格拉陀夫 N M. 数论基础. 裘光明译. 北京：高等教育出版社，1956

9 盖伊 R K．数论中未解决的问题．张明尧译．北京：科学出版社，2003

[General Information]
书名=哥德巴赫猜想与优化筛法
作者=司钊，司琳著
页数=521
SS号=11831338
DX号=
出版日期=2005.9
出版社=西北工业大学出版社